



**HAL**  
open science

# Modélisation magnéto-thermo-hydraulique d'une pièce soumise à un procédé de soudage TIG et estimation d'évolution d'un front de fusion

Morgan Dal

► **To cite this version:**

Morgan Dal. Modélisation magnéto-thermo-hydraulique d'une pièce soumise à un procédé de soudage TIG et estimation d'évolution d'un front de fusion. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Bretagne Sud, 2011. Français. NNT : 2011LORIS244 . tel-04046529

**HAL Id: tel-04046529**

**<https://ubs.hal.science/tel-04046529>**

Submitted on 26 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE / Université de Bretagne-Sud**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*  
pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD**  
*Mention : Science Pour l'Ingénieur*  
**Ecole doctorale SICMA**

présentée par  
**Morgan DAL**

Préparée au sein du  
Laboratoire d'Ingénierie des MATériaux de Bretagne - UBS

# Modélisation magnéto-thermo- hydraulique d'une pièce soumise à un procédé de soudage TIG et estimation d'évolution d'un front de fusion

Directeur de thèse :  
**Philippe LE MASSON**  
Professeur des Universités – Université de Bretagne-Sud

Co-directrice de thèse :  
**Muriel CARIN**  
Maître de conférences, Université de Bretagne-Sud

**Soutenance de Thèse prévue le 02 Décembre 2011**  
devant le jury composé de :

**Denis MAILLET**  
Professeur des Universités – Nancy-Université / *rapporteur*  
**Marc MEDALE**  
Professeur des Universités – Polytech'Marseille / *rapporteur*

**Frédéric DESCHAUX-BEAUME**  
Maître de conférences, HDR – Université de Montpellier / *examineur*  
**Eric FEULVARCH**  
Maître de conférences, Université de Lyon / *examineur*  
**Yvon JARNY**  
Professeur des Universités – Université de Nantes / *examineur*  
**Pascal PAILLARD**  
Professeur des Universités – Université de Nantes / *examineur*

**Philippe GILLES**  
Expert en Mécanique et Matériaux – AREVA NP / *invité*

# Table des matières

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>5</b>
<b>1 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>9</b>
1.1 Le soudage	9
1.1.1 Présentation	9
1.1.2 Les procédés de soudage	10
1.2 Le soudage TIG	11
1.2.1 Principe général	11
1.2.2 Amorçage de l'arc	12
1.3 Problématique	12
1.4 La modélisation du soudage	13
1.4.1 Approche multiphysique	14
1.4.2 Approche "source équivalente"	31
1.4.3 Approche "front de fusion"	34
1.4.4 Bilan sur les méthodes de simulation du soudage	35
1.5 Les problèmes inverses en transfert thermique	36
1.5.1 Introduction	36
1.5.2 Les modèles	37
1.5.3 Un problème mal posé	38
1.5.4 La démarche inverse	39
1.5.5 Quelques exemples de problèmes inverses liés au soudage	41
1.6 Les problèmes inverses liés au changement de phase	44
1.6.1 Introduction	44
1.6.2 La condition de Stefan	44
1.6.3 Les méthodes de résolution	47
1.6.4 Problèmes inverses de frontière mobile	47
1.7 Conclusion du chapitre 1	49
<b>2 MODÉLISATION DU BAIN FONDU</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction	51
2.2 Hypothèses principales	53
2.3 Géométrie	55
2.4 Formulation mathématique du modèle multiphysique	56
2.4.1 Équations de conservation	56

2.4.2	Conditions aux limites . . . . .	60
2.5	L'acier inoxydable austenitique AISI 316L(N) . . . . .	64
2.5.1	Présentation . . . . .	64
2.5.2	Propriétés thermophysiques . . . . .	65
2.6	Maillage et paramètres de résolution . . . . .	69
2.6.1	Introduction . . . . .	69
2.6.2	Maillages et paramètres de la simulation test . . . . .	70
2.6.3	Résultats . . . . .	71
2.7	Distribution de la chaleur latente et condition de Darcy . . . . .	74
2.7.1	Distribution de la chaleur latente . . . . .	75
2.7.2	Paramètres de la loi de Darcy . . . . .	76
2.8	Validation bibliographique . . . . .	78
2.8.1	Description du modèle . . . . .	78
2.8.2	Températures et taille de bain . . . . .	79
2.9	Plan d'expériences numériques . . . . .	80
2.9.1	Choix du plan et des facteurs . . . . .	80
2.9.2	Modèles mathématiques et description de la méthode . . . . .	81
2.9.3	Analyse des effets . . . . .	83
2.9.4	Bilan . . . . .	84
2.10	Influence des phénomènes physiques . . . . .	86
2.11	Conclusion du chapitre 2 . . . . .	88
<b>3</b>	<b>PROBLÈME INVERSE THÉORIQUE</b>	<b>91</b>
3.1	Introduction . . . . .	91
3.2	Modélisation de la phase solide . . . . .	92
3.2.1	Cahier des charges . . . . .	92
3.2.2	Mise en œuvre de la simulation 2D . . . . .	92
3.2.3	Validation de la simulation de la phase solide . . . . .	96
3.3	Écriture du problème inverse . . . . .	102
3.3.1	Présentation - méthode du gradient conjugué . . . . .	102
3.3.2	Choix de la fonction "objectif" . . . . .	104
3.3.3	Fonctionnelle de Lagrange . . . . .	105
3.3.4	Problème en variation ou problème de sensibilité . . . . .	106
3.3.5	Fonctionnelle de Lagrange en variation . . . . .	110
3.3.6	Critère d'arrêt . . . . .	116
3.3.7	Algorithme . . . . .	117
3.4	Application et résultats . . . . .	117
3.4.1	Définition du problème . . . . .	118
3.4.2	Résultats . . . . .	120
3.5	Conclusion du Chapitre 3 . . . . .	124

<b>4</b>	<b>ÉTUDE EXPÉRIMENTALE</b>	<b>125</b>
4.1	Introduction . . . . .	126
4.2	Description de l'échantillon . . . . .	126
4.3	Les méthodes et instruments de mesures . . . . .	128
4.3.1	Thermocouples type K . . . . .	128
4.3.2	Camera rapide Phantom V5 . . . . .	130
4.3.3	Macrographies . . . . .	131
4.4	Première série de mesure . . . . .	132
4.4.1	Introduction . . . . .	132
4.4.2	Orientation du flux de chaleur . . . . .	133
4.4.3	Nombre et position des thermocouples . . . . .	134
4.5	Procédure expérimentale et installation de soudage . . . . .	135
4.6	Résultats et analyse . . . . .	137
4.6.1	Résultats des mesures de température . . . . .	137
4.6.2	Analyse des températures . . . . .	139
4.6.3	Résultats des mesures de rayon du bain liquide en surface . . . . .	141
4.6.4	Résultats des mesures de formes de zones fondues - Macrographies . . . . .	143
4.7	Deuxième série d'essais - Modifications par rapport à la première série . . . . .	144
4.7.1	La mesure de température . . . . .	144
4.7.2	La mesure par caméra rapide . . . . .	145
4.7.3	La préparation des échantillons et traitement des macrographies . . . . .	145
4.7.4	Validation de l'axisymétrie de la zone fondue . . . . .	146
4.8	Résultats et analyse . . . . .	146
4.8.1	Résultats des mesures de température . . . . .	147
4.8.2	Résultats des mesures de rayon de zones fondues en surface . . . . .	149
4.8.3	Résultats des mesures de formes de zones fondues - Macrographies . . . . .	151
4.9	Conclusion du chapitre 4 . . . . .	152
<b>5</b>	<b>VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES</b>	<b>155</b>
5.1	Introduction . . . . .	156
5.2	Inversion des données expérimentales . . . . .	156
5.2.1	Préparation et mise en forme des données . . . . .	158
5.2.2	Initialisation de l'estimation . . . . .	160
5.2.3	Difficultés . . . . .	161
5.2.4	Formes de fronts estimées et températures calculées . . . . .	162
5.2.5	Prise en compte des thermocouples - Modèle d'erreur . . . . .	167
5.2.6	Perturbation à l'instant final . . . . .	174
5.2.7	Conclusion . . . . .	176
5.3	Comparaison : Expérimental - Multiphysique . . . . .	177
5.3.1	Introduction . . . . .	177
5.3.2	Présentation de la simulation retenue . . . . .	177
5.3.3	Comparaison entre températures calculées et températures mesurées . . . . .	180
5.3.4	Comparaison des largeurs de bain en surface . . . . .	182

5.3.5	Comparaison des formes finales de zones fondues . . . . .	183
5.3.6	Conclusion . . . . .	184
5.4	Bilan sur les deux méthodes . . . . .	184
5.5	Conclusion du chapitre 5 . . . . .	187
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES</b>		<b>189</b>
<b>A</b>	<b>Construction du plan d'expériences</b>	<b>195</b>
A.1	Résolution des systèmes d'équations . . . . .	195
A.2	Résultats et analyse . . . . .	196
A.2.1	Validation du modèle mathématique . . . . .	196
A.2.2	Analyse des effets . . . . .	198
<b>B</b>	<b>Paramètres du modèle et propriétés thermophysiques de l'acier inoxydable 316L</b>	<b>201</b>
<b>C</b>	<b>Formulation du problème inverse</b>	<b>203</b>
C.1	Fonctionnelle de Lagrange . . . . .	203
C.2	Problème en variation ou problème de sensibilité . . . . .	204
C.2.1	Variation de la fonctionnelle résiduelle . . . . .	204
C.2.2	Écriture de l'équation de la chaleur en variation . . . . .	205
C.2.3	Écriture des conditions aux limites en variation . . . . .	208
C.3	Fonctionnelle de Lagrange en variation . . . . .	210
C.3.1	Réduction de l'ordre des dérivées de $\delta\theta$ . . . . .	211
C.3.2	Complément des conditions aux limites . . . . .	215
C.3.3	Forme finale de variation de la fonctionnelle de Lagrange . . . . .	217
C.3.4	Déduction du problème adjoint . . . . .	217
<b>D</b>	<b>Effet du méplat de l'électrode sur les dimensions de bain fondu</b>	<b>221</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le soudage est une méthode d'assemblage extrêmement utilisée dans l'industrie et plus particulièrement dans l'industrie lourde. Les domaines d'application sont variés, citons par exemple, la production d'énergie, l'automobile, la construction navale et bien d'autres encore.

Il existe un grand nombre de procédés présentant chacun des avantages et inconvénients différents. Cependant, celui qui est le plus utilisé est le soudage à l'arc et plus particulièrement le procédé TIG (Tungsten Inert Gas), dont la qualité de soudure et la compacité en font un procédé particulièrement efficace. Pour cette raison, ce dernier fait l'objet de la présente étude.

Le procédé TIG permet la fusion locale des pièces à souder par l'intermédiaire d'un arc électrique. Cet arc, localisé entre une électrode non fusible et les matériaux à assembler, est maintenu au sein d'un plasma. Ce dernier étant lui même alimenté par un écoulement de gaz plasmagène.

Dans l'ensemble, les interrogations relatives au soudage portent sur la qualité de la liaison, la rapidité de production et les niveaux d'énergie dépensés pour obtenir une forme de cordon de soudure souhaitée. Jusque récemment, les réponses à ces questions étaient obtenues uniquement de manière expérimentale, par de coûteuses campagnes d'essais. Actuellement, les outils informatiques étant de plus en plus performants, la simulation numérique prend davantage de poids dans ce domaine de recherche. Néanmoins, les expériences restent toujours d'actualité, en tant que validation.

L'obtention de la fusion des matériaux à souder implique des niveaux de température élevés et donc des effets thermomécaniques, dans la phase solide, importants. Lors du refroidissement, ces effets sont partiellement figés sous forme de contraintes et déformations résiduelles. Ces dernières peuvent être à l'origine de défauts, de fissures ou de l'affaiblissement local des propriétés mécaniques de la structure. Pour valider la qualité de la liaison, il s'agit donc de quantifier ces effets, soit expérimentalement, soit numériquement.

La simulation numérique impose la définition de trois types de physiques couplés : les transferts thermiques, la métallurgie et la mécanique. L'évolution de la température est à l'origine des transformations métallurgiques et des déformations mécaniques. Par conséquent, sa détermination est fondamentale pour une bonne évaluation des effets résiduels. Les travaux présentés ici, sont construits sur cette notion et visent à obtenir des évolutions de température les plus proches de la réalité et cela, lors de l'application statique d'un procédé de soudage.

Pour calculer les évolutions temporelles de champs thermiques, deux stratégies sont mises en œuvre dans ce travail de thèse.

Dans la première, la simulation est qualifiée de "multiphysique", car son objectif est de coupler les phénomènes physiques qui ont le plus d'influence sur la température. Interviennent par exemple, dans le cadre du soudage TIG, les transferts thermiques, la mécanique des fluides, et l'électromagnétisme. Les principaux atouts de cette démarche sont qu'elle permet la validation de modèles mathématiques représentatifs de phénomènes physiques et donc leur compréhension, la prédiction de la forme du cordon de soudure et des champs de température sans avoir recours à l'expérimentation ainsi que la prédiction des déformations et contraintes mécaniques à partir des paramètres opératoires. Cependant, du fait des forts couplages, les ressources numériques nécessaires à ce type d'approche sont conséquentes et les durées de résolution sont particulièrement prohibitives.

Dans la seconde stratégie, l'accent est mis sur la détermination des effets mécaniques. Étant donné la capacité de la phase liquide à se déformer, seule l'histoire thermique de la phase solide a de l'influence sur les effets thermomécaniques. A partir de cette observation, certains travaux, tels ceux de D.D.Doan [31], prennent le parti de ne traiter que le problème de conduction thermique dans la phase solide. Pour les cas complexes, l'évolution de la position du changement de phase doit être obtenue par méthode inverse. La dimension du problème numérique est donc réduite et les durées de résolution restent relativement faibles. Néanmoins, la nécessité de développer un problème inverse sous-entend la mise en place d'une étude expérimentale et annule toutes notions prédictives.

La démarche mise en place pour cette étude est décomposée en cinq étapes, que nous présentons dans cinq chapitres.

- **Chapitre 1 : Étude bibliographique** - Dans ce chapitre sont présentés de précédents travaux dont les sujets portent sur des problématiques similaires aux nôtres. En l'occurrence, ce chapitre débute par une présentation du procédé TIG. Ensuite, sont présentées les modélisations des différents phénomènes physiques intervenant lors du soudage. Après cela, la notion de problème inverse est introduite et quelques exemples de cas appliqués au soudage sont relatés. Pour finir, une présentation de problèmes de changement de phase appliqués au soudage est effectuée. En conclusion, sont présentés nos choix et hypothèses pour la suite de l'étude.
- **Chapitre 2 : Modélisation multiphysique d'un bain** - Cette étape consiste en la définition d'une modélisation des transferts thermiques qui apparaissent lors d'une opération de soudage TIG statique. Pour cela, les différentes étapes de construction de ce modèle sont décrites, en commençant par les hypothèses, suivies par la présentation complète de la simulation. Ensuite, la sensibilité des résultats à certains éléments de la modélisation, de même que l'influence de certains phénomènes sont analysées. Pour finir, les hypothèses

retenues sont validées par comparaison avec des résultats disponibles dans la littérature.

- **Chapitre 3 : Problème inverse : estimation de l'avancée du front** - Dans ce cas, il s'agit de construire une simulation simplifiée représentative des aspects conductifs dans la phase solide et dans laquelle la phase liquide n'est pas représentée. Après avoir confirmé la qualité de ce mode de simulation simplifiée, un problème inverse est mis en place pour estimer l'évolution du front de fusion au cours d'un "essai statique de soudage". À cette étape, l'essai est purement numérique, les "données expérimentales" utilisées pour l'estimation sont des résultats issus de la simulation multiphysique du chapitre 2. Cette estimation est validée dans des conditions proches de l'expérience.
  
- **Chapitre 4 : Étude expérimentale** - À ce stade, le problème inverse est validé numériquement, cependant, une application expérimentale est essentielle. Les informations nécessaires à l'estimation sont des températures observées localement dans la phase solide et l'évolution du front de fusion en surface de la pièce soudée. Pour ce faire, trois types d'instrumentation sont mises en place. Premièrement, la température dans le solide est mesurée par thermocouples de type K et deuxièmement, l'évolution du front en surface est observée par caméra rapide. Dans ce chapitre, sont donc commentés les choix concernant le positionnement des capteurs de température ainsi que les résultats obtenus au cours de deux campagnes d'essais.
  
- **Chapitre 5 : Validations expérimentales** - Dans ce chapitre, les résultats numériques de chaque méthode de simulation sont comparés aux observations expérimentales. Premièrement, le problème inverse est résolu avec les données mesurées lors de l'étude expérimentale. Deuxièmement, les formes de zones fondues obtenues par l'approche multiphysique sont comparées à des coupes macrographiques à différents instants. Les évolutions temporelles de température dans le solide sont validées de la même manière. Troisièmement, les limites de chaque approche sont analysées compte tenu des résultats des deux confrontations.



# Chapitre 1

## ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

### Sommaire

---

<b>1.1 Le soudage</b>	<b>9</b>
1.1.1 Présentation	9
1.1.2 Les procédés de soudage	10
<b>1.2 Le soudage TIG</b>	<b>11</b>
1.2.1 Principe général	11
1.2.2 Amorçage de l'arc	12
<b>1.3 Problématique</b>	<b>12</b>
<b>1.4 La modélisation du soudage</b>	<b>13</b>
1.4.1 Approche multiphysique	14
1.4.2 Approche "source équivalente"	31
1.4.3 Approche "front de fusion"	34
1.4.4 Bilan sur les méthodes de simulation du soudage	35
<b>1.5 Les problèmes inverses en transfert thermique</b>	<b>36</b>
1.5.1 Introduction	36
1.5.2 Les modèles	37
1.5.3 Un problème mal posé	38
1.5.4 La démarche inverse	39
1.5.5 Quelques exemples de problèmes inverses liés au soudage	41
<b>1.6 Les problèmes inverses liés au changement de phase</b>	<b>44</b>
1.6.1 Introduction	44
1.6.2 La condition de Stefan	44
1.6.3 Les méthodes de résolution	47
1.6.4 Problèmes inverses de frontière mobile	47
<b>1.7 Conclusion du chapitre 1</b>	<b>49</b>

---

## 1.1 Le soudage

### 1.1.1 Présentation

Dans le cadre industriel actuel, il est possible de distinguer un certain nombre de procédés d'assemblage, dont le soudage fait partie. On peut séparer les méthodes permettant de lier mé-

caniquement les pièces à assembler (rivetage, sertissage, vissage, etc.) des assemblages collés destinés aux faibles sollicitations.

Le soudage est la méthode d'assemblage la plus ancienne remontant à l'âge des métaux. Les techniques évoluent peu jusqu'à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle où les procédés de soudage à l'arc et par résistance commencent à être mis en œuvre (entre autre). Dès 1920, le soudage commence à être développé dans certains domaines industriels pour ensuite connaître une importante progression en terme d'utilisation et de technologies. Actuellement, les innovations sur les procédés sont de moins en moins importantes, cependant il reste un domaine particulièrement étudié pour des raisons de qualité demandée croissante.

### 1.1.2 Les procédés de soudage

Les types de procédés disponibles en grand nombre et sous diverses formes, peuvent être répartis en deux catégories :

- les endogènes, pour lesquels l'apport d'énergie est interne. On trouvera, de façon non exhaustive, les procédés de soudage par résistance, par friction, par diffusion, par explosion ou par ultra-sons.
- les exogènes, faisant appel à une source externe d'énergie. Principalement utilisés dans l'industrie, les procédés concernés sont les procédés de soudage à l'arc électrique, faisceau d'électrons, faisceau laser ou plasma.

Davantage d'informations sur les différents types de procédés de soudage sont disponibles dans des ouvrages [17].

Les procédés faisant intervenir un arc électrique sont les plus répandus dans le cadre industriel, il s'agit de la famille du "soudage à l'arc" [74]. Il existe sous plusieurs variantes dont les spécificités peuvent être : la fusibilité de l'électrode, le gaz de protection, le métal d'apport et bien d'autres encore. Notre présentation est donc focalisée sur ce type de procédés et plus particulièrement sur les procédés de "soudage sous protection gazeuse".

Deux types de soudage à l'arc se distinguent :

- Le soudage MIG - MAG :

Dans cette catégorie sont regroupés les procédés à électrode fusible : MIG (Metal Inert Gas) et MAG (Metal Active Gas). Ils sont majoritairement utilisés du fait de leur grande flexibilité. En effet, ils peuvent être mis en œuvre de façon manuelle, semi-automatique ou entièrement robotisée. La fonte de l'électrode permet de l'utiliser aussi bien dans le cadre de l'assemblage que dans celui du rechargement. La distinction entre les deux procédés porte sur le type de gaz de protection. Il peut être soit inerte soit actif, entraînant ou non l'oxydation de la surface du joint de soudure.

– Le soudage TIG - ATIG :

Dans le cas des procédés TIG (Tungsten Inert Gas) et ATIG (Activated - Tungsten Inert Gas), le caractère réfractaire de l'électrode implique une soudure sans métal d'apport et ne permet pas de remplissage. Cependant, ce procédé peut être appliqué avec apport de matière, mais le métal fusible est ajouté de manière annexe au procédé.

La principale faiblesse du procédé TIG est la faible profondeur de pénétration des cordons de soudure. Aussi, l'ajout de flux activant ou "élément tensioactif" (ATIG) permet, lors de la fusion, d'inverser le sens des écoulements au sein du bain de fusion et donc d'augmenter les profondeurs de pénétration.

Dans le cadre de cette thèse, le procédé TIG est utilisé. Une présentation plus détaillée de son fonctionnement est donc effectuée dans le paragraphe suivant.

## 1.2 Le soudage TIG

### 1.2.1 Principe général

Le procédé de soudage TIG permet la jonction de deux matériaux en contact par la fusion d'une portion de leur surface de contact grâce à la présence d'un arc électrique, créant ainsi une continuité de matière.

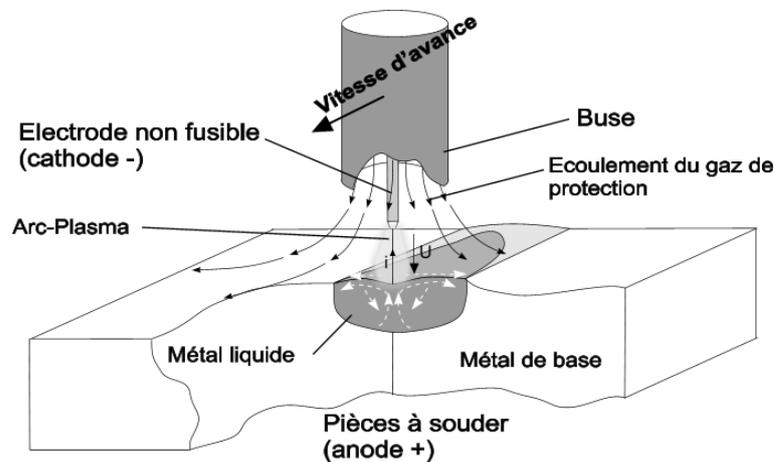


Figure 1.1 – Schéma du procédé TIG

Le schéma de la figure 1.1 illustre les principaux éléments d'une "torche" TIG. Au centre de la buse, dans laquelle s'écoule le gaz de protection, se trouve l'électrode en tungstène. Cette électrode est le pôle négatif (la cathode) du circuit électrique et les pièces à souder représentent le pôle positif (l'anode). L'anode est mise à la masse et un potentiel est appliqué sur la cathode, la tension ( $U$ ) ainsi créée entraîne, après amorçage de l'arc, le passage du courant électrique ( $i$ ) à travers l'épaisseur d'air initialement isolant électrique.

Trois zones caractéristiques peuvent être identifiées sur la figure 1.1 : le gaz de protection, la zone fondue et le métal de base. Dans chaque zone siègent des phénomènes physiques différents dont la complexité est décroissante. La zone au voisinage du gaz fait intervenir la mécanique des fluides faiblement ou non compressibles, l'électromagnétisme, les phénomènes de transfert thermique et de la diffusion (électrons ions). Dans le métal liquide, la mécanique des fluides incompressibles est associée au problème thermique et au problème électromagnétique. Dans le solide, seuls la part diffusive des transferts thermiques et l'électromagnétisme sont présents.

### 1.2.2 Amorçage de l'arc

Deux méthodes sont employées pour créer cette situation d'amorçage. La première possibilité est l'application d'une surtension (supérieure au seuil de claquage) de haute fréquence entre les deux électrodes. La seconde méthode est utilisée pour une tension restant continue. Elle consiste à mettre en contact la cathode et l'anode. Ensuite, le retrait progressif de l'électrode va permettre la formation d'un arc pour une faible épaisseur d'air mais qui est maintenu durant la remontée de l'électrode, et cela jusqu'à la hauteur d'arc souhaitée.

## 1.3 Problématique

Les applications industrielles du procédé TIG nécessitent une bonne connaissance des formes de cordons de soudure ainsi que des effets mécaniques (contraintes et déformations) qu'entraîne le procédé sur les pièces après soudage. Les raisons de ce besoin sont de différents ordres. Soit il peut s'agir de sécurité, à travers la recherche de défauts ou de faiblesses engendrées par l'opération de soudage. Soit, il peut s'agir de conception, pour la réalisation d'assemblages de structures complexes ou de fortes épaisseurs.

Expérimentalement, les informations ne sont disponibles qu'a posteriori ou au mieux, au cours du soudage. Les forces de la simulation numérique tiennent soit, dans son potentiel prédictif en termes d'observables thermiques et mécaniques, soit en tant qu'outil de compréhension.

Les attentes de la simulation dépendent du type de modèle utilisé :

- Modèle multiphysique      Il permet de comprendre des phénomènes et d'évaluer le poids des différents mécanismes physiques. Il a pour objectif d'être prédictif (à partir des paramètres opératoires), et ainsi de mieux comprendre les phénomènes à l'origine de l'apparition de défauts ou d'optimiser les paramètres opératoires.

- Modèle purement thermique Il permet d'être prédictif sur la forme de cordon de soudure en fonction des paramètres opératoires. Cependant, compte tenu des hypothèses, cette prédiction reste limitée.
  
- Modèle thermomécanique avec métallurgie Il peut être effectué après les deux précédentes modélisations. Il permet la prédiction des contraintes et déformations résiduelles (la physique du bain est alors simplifiée) ainsi que la structure métallurgique.

Selon les attentes, la stratégie de simulation doit être adaptée. Dans ce travail de thèse, seules les deux premières méthodes de modélisation sont appliquées. Notre intérêt est porté sur l'aspect fortement transitoire des transferts thermiques apparaissant aux premiers instants de soudage. L'objectif d'une telle démarche est de maîtriser les variations de la forme du cordon de soudure au cours du temps. Les applications industrielles peuvent être liées à des soudages avec raccordement de cordons, auquel cas, la forme du cordon de soudure obtenue juste après la création du bain peut influencer la forme finale du joint. L'aspect transitoire peut aussi être exploité pour des procédés fonctionnant avec un courant pulsé, une pulsation de basse fréquence générant des variations de la géométrie du bain liquide.

Pour mener cette étude, une approche comparative entre deux méthodes de modélisation du champ thermique dans la phase solide est mise en place. La première méthode est une simulation multiphysique de l'anode (la pièce). La seconde est une simulation thermique, de la phase solide uniquement, basée sur le contrôle des positions de l'interface liquide - solide au cours du temps.

## 1.4 La modélisation du soudage

La modélisation numérique du soudage étant un domaine très étudié, cette étude bibliographique n'a pas la présomption d'être parfaitement exhaustive. Cependant, nous résumerons les principales approches développées, les résultats obtenus ainsi que les différentes limites de leurs applications.

Trois approches sont couramment utilisées :

Premièrement, les études dites **multiphysiques**, dont l'objectif est l'implémentation des phénomènes physiques les plus influents sur les résultats de la simulation. Les domaines généralement pris en compte sont : l'ensemble arc - plasma, le bain liquide et la phase solide.

Deuxièmement, les études thermiques purement conductives avec une **source de chaleur équivalente**, dont l'intérêt est d'obtenir, par certaines simplifications, une limite de zone fondue et un champ de températures, cohérents dans la partie solide. Dans ce cas, seuls le bain liquide et la partie solide sont représentés.

Troisièmement, les études que nous nommerons : **avec retrait du volume liquide**, sont aussi des problèmes purement conductifs. Dans ce cas, l'objectif est de ne traiter que la partie solide de la pièce soudée. Ce qui signifie, retirer de la géométrie le volume de liquide et ne con-

sidérer que l'interface liquide-solide à température imposée.

Les deux dernières approches sont, en général, fortement corrélées à une étude expérimentale afin d'identifier les lois régissant l'apport de chaleur ou les positions de la limite du bain fondu.

### **1.4.1 Approche multiphysique**

#### **1.4.1.1 Les phénomènes physiques dans les différents domaines**

Dans le cadre de la simulation, la zone d'intérêt est l'ensemble composé de l'électrode, de la partie arc - plasma et des pièces à souder. Chacun de ces éléments est le siège de phénomènes physiques dont les interactions permettent le soudage.

#### **La cathode**

L'électrode (la cathode) est parcourue par le courant électrique à l'origine de l'arc. Ce courant, associé à l'énergie thermique transmise du plasma vers la cathode par conduction, entraîne l'échauffement de l'électrode. Une quantité de chaleur est cédée à l'environnement (le gaz de protection), en partie par convection et rayonnement et en partie par l'émission électronique (contrairement à la neutralisation des ions qui apporte de l'énergie).

#### **La colonne d'arc et le plasma**

Lorsque l'arc est développé, le gaz de protection, chauffé à très haute température par effet Joule, est le siège de phénomènes de diffusion électrons - ions (diffusion ambipolaire). Il s'agit alors d'un plasma. Ce dernier entoure la colonne d'arc et est confiné par l'écoulement gazeux ainsi que par une force électromagnétique (force de Lorentz).

#### **L'anode**

La majeure partie de l'énergie reçue par l'anode est amenée par convection lors de l'étalement du plasma sur la pièce, le reste provenant de la capture des électrons par l'anode et du rayonnement issu du plasma. La colonne d'arc exerce une pression et donc une déformation sur la surface de la pièce ayant localement fondue. Ce liquide est lui-même mis en mouvement par différents moteurs d'écoulement, surfacique ou volumique. Les transferts thermiques au sein de la pièce sont donc purement conductifs dans la partie solide de la pièce et à la fois conductifs et convectifs dans la phase liquide.

1.4.1.2 Les différents types de modélisation

Le choix du domaine

Les premiers modèles développés se sont d’abord limités à l’anode pour simuler les transferts thermiques en soudage TIG. L’apport d’énergie dû à l’arc est alors appliqué à la surface de l’anode. Des lois mathématiques, le plus souvent de type Gaussien, sont utilisées pour décrire la distribution d’énergie en surface. Se pose alors le problème du choix des paramètres décrivant ces lois, comme les coefficients de distribution, ce qui limite fortement le caractère prédictif de ces modèles.

Pour ces modèles, limités à l’anode on peut citer I.S. Kim et al. ([66]), W.H. Kim et al. ([68]), A. Kumar et al. ([72] ou [73]), S. Mishra ([93]), P. Zhao ([132]) ou encore A. Traidia et al. ([115]), H.G. Fan et al. ([40]) ou K.B. Bisen et al. ([16]).

Afin de rendre ces modèles plus prédictifs, des modèles arc - plasma sont alors développés. Ils permettent de calculer les distributions d’énergie, de courant et de pression à la surface de l’anode. Ces données peuvent alors servir de conditions aux limites pour des modèles d’anode.

L’exemple le plus caractéristique est le travail de W.H. Kim et al. qui, lors d’un premier article ([67]) présentent la définition du modèle d’arc, et lors d’un deuxième article ([68]), utilisent les précédents résultats (figure 1.2) dans une simulation d’anode uniquement (figure 1.3). Notons que dans les deux simulations, la déformation de la surface libre est traitée et les perturbations sur les différentes distributions sont présentées (décroissances au niveau de la dépression). De la même manière, A. Traidia et al. ([116]) couplent un modèle d’arc - plasma (2D axisymétrique) avec un modèle d’anode (3D). J. Baken et al. ([10]), S. Lu et al. ([88]), S. Gao et al. ([45]), F. Yin et al.([128]) ou H.G. Fan et al. ([39]) permettent, par leurs résultats, d’obtenir davantage d’informations sur les conditions en surface de zone fondue.

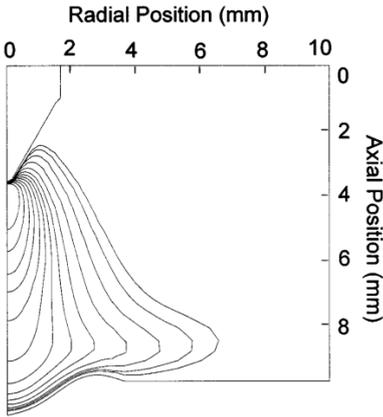


Figure 1.2 – Isothermes calculées dans le plasma par W.H. Kim ([67]) (de 10000 K à 22000 K)

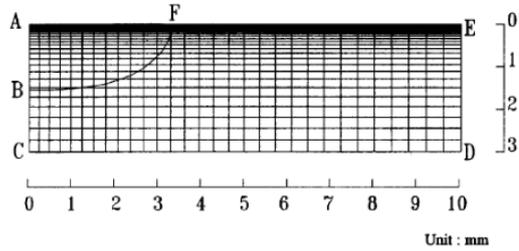


Figure 1.3 – Géométrie d’anode simulée par W.H. Kim ([68])

Enfin, ont été développées des études complètes dites “unifiées“. Elles représentent l’ensemble : cathode + arc -plasma + anode. Citons, pour exemple, quelques auteurs de travaux significatifs dans ce type d’étude : M. Tanaka et al. ([111], [112]), F. Lu et al. ([87], [86]), J. Lowke et al. ([85])

et R. Urusov et al. ([120]) ou encore M. Brochard ([21]), et plus récemment A. Traidia et al. ([114]). Dans chaque cas, l'unification des domaines implique la prise en compte d'une géométrie globale comme celle présentée sur la figure 1.4.

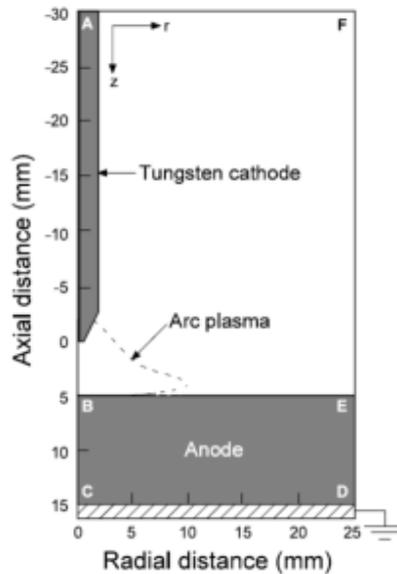


Figure 1.4 – Géométrie unifiée simulée par M. Tanaka ([112])

Les résultats présentés dans ces quelques références sont en général le flux de chaleur, la densité de courant, la force de cisaillement et la déformation en surface de bain lorsqu'elle est prise en compte.

### Les choix géométriques

Compte tenu des limites des ressources informatiques, la complexité des modèles unifiés implique la définition de géométries simplifiées. En l'occurrence, l'ensemble des modélisations traitant de la zone arc-plasma sont construites dans un repère bi-dimensionnel axisymétrique, il s'agit donc de cas de soudage simplifiés pour lesquels la torche reste statique. En revanche, le fait de ne traiter que la partie anode permet de construire des géométries plus complexes. H. Dong et al. ([33]), J. Hu et al. ([56] pour du soudage MAG) ou A. Traidia et al. ([115]) simulent des cas de soudage en trois dimensions avec une source mobile, plus cohérents avec l'utilisation réelle des procédés. Des études de l'anode seule dans un repère bi-dimensionnel axisymétrique existent cependant. Il s'agit d'études dans lesquelles l'aspect transitoire est analysé. Citons les travaux de H.G. Fan et al. ([40]), de I.S. Kim et al. ([66]), Y. Wang et al. ([122]) ou A. Traidia et al. ([115]).

### Les études stationnaires ou transitoires

En fonction de ce qui doit être observé grâce à la simulation, les analyses peuvent être stationnaires ou transitoires. Les cas purement stationnaires sont généralement les modélisations les plus complètes donc les plus complexes ([21]). Cependant, il est plus fréquent de voir des simulations dites quasistationnaires, dans lesquelles le repère de l'étude est mobile et situé sur la torche (la source). Ainsi, lorsque les phénomènes transitoires sont établis, la forme du cordon

et le champ de température sont stationnaires dans ce repère. Cela implique un domaine tri-dimensionnel. Par cette méthode, les cas de soudage représentés sont plus réalistes et des études de type conception peuvent être réalisées. Par exemple, J. Hu et al. ([56]) étudient un cas de soudage (MAG) avec prise en compte de l'apport de matière et la déformation de la surface du bain qui en résulte, H. Dong et al. ([33]) présentent un procédé avec une source de chaque côté de la pièce et Traidia et al. ([115]) considèrent un soudage avec apport de matière et déformation de la surface du bain.

### Nos choix préliminaires

Rappelons que l'objectif de cette thèse est de déterminer l'évolution temporelle de la limite de la zone fondue ainsi que l'évolution du champ de température dans la phase solide, cela, pour un cas de soudage statique. L'aspect transitoire est donc nécessaire. Dans l'ensemble des références citées précédemment, ce type d'analyse est effectué dans un repère axisymétrique. Dans ces conditions, les travaux les plus proches de notre configuration sont ceux de M. Tanaka et al. ([112]), dans lesquels la partie arc - plasma est modélisée, ou de H.G. Fan et al. ([40]), dans lesquels seule l'anode est simulée. Dans notre cas, le choix de ne traiter que la partie anode est effectué en considérant la validité des résultats obtenus avec et sans prise en compte de la zone arc - plasma.

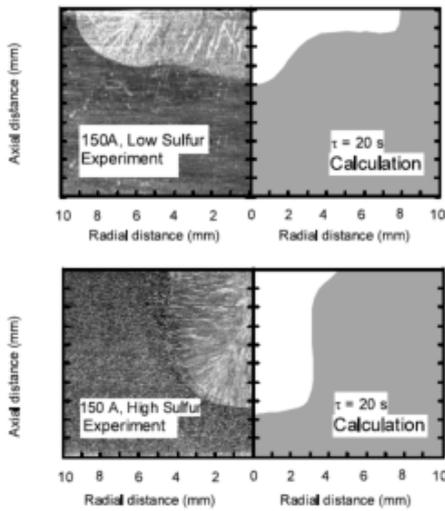


Figure 1.5 – Comparaison des formes de zones fondues expérimentales et théoriques (M. Tanaka et al. [112])

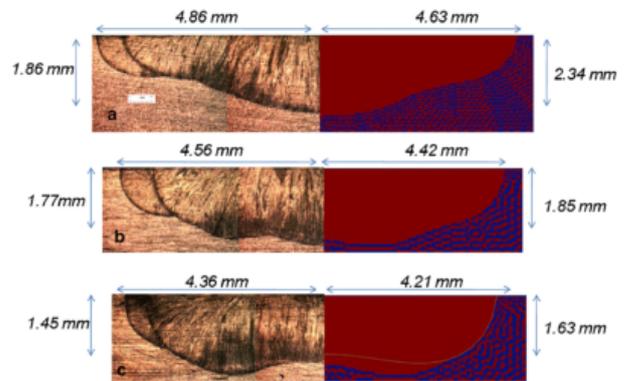


Figure 1.6 – Comparaison des formes de zones fondues expérimentales et théoriques (A. Traidia et al. [115])

Les figures 1.5 et 1.6 sont des comparaisons de résultats numériques à des macrographies, observées dans les références [112] et [115]. Ces validations sont fréquentes et permettent de juger de la validité d'un modèle. La figure 1.5 résulte d'une simulation avec arc - plasma et la figure 1.6 est obtenue en ne considérant que l'anode. Le cas sans modèle d'arc - plasma est plus proche de la réalité en terme de dimension de zone fondue. Cela nous amène à deux conclusions : la première est qu'un modèle, même très complet comme celui de M. Tanaka, ne permet pas forcément d'obtenir une évolution de frontière liquide - solide réaliste. La seconde est qu'en ne considérant que l'anode mais en conditionnant avec attention les apports en surface de la pièce,

la simulation peut présenter des résultats très satisfaisants.

Ces observations nous amènent à ne considérer que la partie anode (la pièce) du procédé. Néanmoins, nous traiterons avec soin les phénomènes présents dans le métal liquide ainsi que dans le solide.

### 1.4.1.3 La représentation de la physique dans l'anode

Les problèmes physiques à traiter dans l'anode sont les suivants :

- Problème de transferts thermiques - conservation de l'énergie.
- Problème de mécanique des fluides - conservation de la masse et de la quantité de mouvement.
- Problème électromagnétique - équations de Maxwell.
- Problème de frontière mobile - déformation de la surface du bain de fusion.

Ces différents problèmes interagissent les uns avec les autres. Le problème de transferts thermiques permet de déterminer le champ de température dans l'ensemble de la pièce. Dans la partie fondue, les écoulements modifient la diffusion de la chaleur. Ces écoulements sont engendrés par des forces qui peuvent être surfaciques, comme celles générées par l'effet Marangoni ou celles issues de l'écoulement gazeux en surface de bain, ou volumiques, comme la force de flottabilité ou la force de Lorentz. Cette dernière étant d'origine électromagnétique, la distribution de la densité de courant électrique dans la pièce doit être déterminée. De la même manière, la déformation de la surface du bain va modifier les écoulements dans l'ensemble de la pièce, il s'agit donc d'un élément supplémentaire à considérer.

Dans la littérature, ces précédentes considérations ne sont pas forcément mises en œuvre de la même manière, et parfois même, certaines sont négligées. Dans les paragraphes suivants, sont présentées les principales hypothèses relatives aux différents problèmes physiques.

#### Problème de transferts thermiques - conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie peut être formulée en température ([40],[68] ou [115]) :

$$\rho c_{p,eq} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T \right) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \nabla T) + S \quad (1.1)$$

ou en enthalpie ([122], [111] ou [93]) :

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla h \right) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \nabla T) + S \quad (1.2)$$

avec  $T$  la température (K),  $h$  l'enthalpie massique ( $J.kg^{-1}$ ) et  $S$  une source volumique ( $W.m^{-3}$ ).

**La chaleur latente de fusion - solidification :**

Les deux formulations (1.1) et (1.2), sont équivalentes dans chaque phase. Cependant, la formulation enthalpique tient intrinsèquement compte de la chaleur latente de changement de phase. Par exemple, Y. Wang et al. ([122]) considèrent des chaleurs massiques constantes mais différentes dans chaque phase ( $c_{p_s}$  et  $c_{p_l}$ ) et la chaleur latente ( $L_m$ ) apparaît dans l'expression liant l'enthalpie à la température dans la phase liquide.

Des problèmes de changement de phase, traités par la méthode enthalpique, sont aussi étudiés par B. Nedjar [95] ou E. Feulvarch et al. [41].

$$h_s = c_{p_s}T \quad ; \quad h_l = c_{p_l}(T - T_s) + c_{p_s}T_s + L_m \quad \text{et} \quad h = h_s f_s + h_l f_l \quad (1.3)$$

avec  $f_s$  et  $f_l$  les fractions (massiques) solide et liquide et  $T_s$  la température du solidus.

Comme C. Bonacina et al. ([18]) le montrent, la formulation en température impose l'utilisation d'une chaleur massique ( $c_p$ ) "équivalente" (équation 1.4) dans laquelle est distribuée l'énergie de changement de phase. Pour un matériau pur, ils proposent une distribution sur une fonction de Dirac et confirment cette approximation analytiquement. Pour les aciers, le changement de phase se produit entre les températures de solidus et de liquidus. La distribution de la chaleur latente sur cet écart de température est donc réaliste.

$$c_{p,eq} = c_p + L_m D(T) \quad (1.4)$$

Dans la littérature, la distribution peut être effectuée en fonction de la fraction liquide ([40] ou [115]), soit :

$$D(T) = \frac{\partial f_l}{\partial T} \quad (1.5)$$

La chaleur latente peut aussi être distribuée selon une loi gaussienne ([75]) afin de faciliter la résolution du problème numérique.

$$D(T) = \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta T^2}} \exp\left(-\frac{(T - T_{fus})^2}{\Delta T^2}\right) \quad (1.6)$$

**La chaleur latente de vaporisation - liquéfaction :**

Certains travaux comme ceux de Y. Wang et al. ([122]), F. Lu et al. ([86]) ou de T. Zacharia et al. ([130]) prennent en compte l'évaporation du liquide dans le plasma et concluent que sans cela la température maximale obtenue dans la zone fondue atteindrait la température de vaporisation. Notons cependant, que cette considération est relativement rare, d'autant plus que l'énergie apportée par le procédé de soudage TIG est en général trop peu pour entraîner la vaporisation du matériau ( $T_{max} \approx 2500 \text{ }^\circ\text{C} \ll T_{vap} \approx 2808^\circ\text{C}$  pour un acier inoxydable [130]).

**L'effet Joule :**

L'effet Joule est un apport de chaleur volumique créé par le passage du courant électrique dans l'anode, défini par :

$$Q_{Joule} = \frac{\|\vec{j}\|^2}{\sigma_{EM}} \quad (1.7)$$

avec  $\sigma_{EM}$  la conductivité électrique du métal. Il est à noter que, bien que physiquement présent, ce phénomène n'est quasiment jamais pris en compte dans ce type de simulation. En effet, le courant incident n'est pas assez concentré, donc la densité  $\vec{j}$  est trop faible pour que l'effet soit significatif.

**Les pertes et apports thermiques :**

Sur les surfaces exposées à l'environnement extérieur, les pertes peuvent être convectives ou radiatives. Si le rayonnement émis par la pièce est bien maîtrisé, l'aspect convectif l'est moins. En effet, la surface soumise à l'écoulement du gaz de protection perd de la chaleur par convection forcée. Cependant, le niveau de température étant important à proximité de la zone fondue, les pertes par rayonnement sont bien plus importantes que les pertes convectives. Pour cette raison, dans la grande majorité des travaux, un coefficient de convection constant est utilisé. Davantage de précision sur les valeurs utilisées sera présenté dans la définition du modèle du chapitre 2.

La définition de l'apport de chaleur est le point critique de ce type de simulation. Comme nous l'avons présenté précédemment, soit les données sont issues de précédents travaux traitant de l'arc - plasma ([68] ou [40]), soit une loi est construite pour le cas étudié. Dans la majorité des cas, ce sont des distributions gaussiennes ([93], [132] ou [16]). Précisons que K.B. Bisen et al. ([16]) définissent leur distribution grâce aux travaux expérimentaux de N.S Tsai et al. ([119]) dans lesquels sont proposées des relations entre différents paramètres opératoires et les paramètres de la distribution.

Notons que l'hypothèse d'une distribution gaussienne ne peut être retenue pour toutes les configurations expérimentales. En effet, certains travaux relatifs à des simulations unifiées, comme ceux de S. Lu et al. ([88]) ou M. Brochard ([21]), présentent des études de sensibilité de paramètres opératoires sur le flux apporté en surface d'anode. La tendance observée est que les distributions gaussiennes sont seulement réalistes pour les courants importants, les faibles hauteurs d'arc et les angles d'affûtage d'électrodes importants.

**Problème de mécanique des fluides - conservation de la masse et de la quantité de mouvement**

Régi par deux principes de conservation, la masse et de la quantité de mouvement, le problème de mécanique de fluides est exprimé par les équations (1.8) et (1.9) dont les expressions sont obtenues en considérant le métal liquide comme un fluide Newtonien, incompressible et siège d'un écoulement laminaire.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.8)$$

$$\rho_L \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left( -p\mathbf{I} + \mu(T)(\vec{\nabla}\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{V}^T) \right) + \vec{f}_v \quad (1.9)$$

avec  $\vec{V}$  le vecteur vitesse,  $p$  la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\rho_L$  la masse volumique (moyenne) de la phase liquide et  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Dans l'équation 1.9, le premier terme est défini comme étant représentatif de l'inertie, le second est lié aux forces de pression, le troisième aux forces visqueuses et le dernier ( $\vec{f}_v$ ) est un vecteur de forces volumiques, dans lequel interviennent classiquement des termes tels que les forces de flottabilité, les forces électromagnétiques et la "condition de Darcy" que nous détaillerons par la suite.

Ce problème est traité en raison de l'importance des effets convectifs de l'écoulement sur la forme du cordon de soudure.

L'hypothèse d'incompressibilité est couramment admise dans le cadre du soudage. Par contre, l'aspect Newtonien des métaux liquides a récemment été remis en question dans les travaux de M. Jeyakumar et al. ([58]). Ils démontrent un comportement non Newtonien de certains métaux à l'aide de données expérimentales obtenues par rhéométrie rotationnelle. Néanmoins, ils ne présentent pas de résultat pour les alliages à base de fer mais uniquement pour des métaux à bas point de fusion.

Par ailleurs, bien que la majorité des travaux publiés font l'hypothèse d'un régime d'écoulement laminaire, certains auteurs ont parfois utilisés un modèle turbulent. Ainsi, K. Hong et al. ([55]), montrent qu'en utilisant un modèle  $k - \varepsilon$ , les formes de zones fondues simulées sont plus proches de la réalité qu'avec un modèle laminaire. Cependant, les incertitudes sur la définition des paramètres propres à ce modèle impliquent de considérer ces résultats avec précaution.

### Les moteurs de l'écoulement

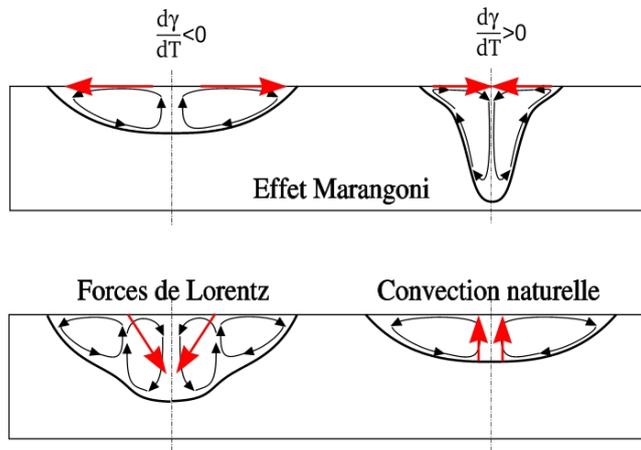


Figure 1.7 – Moteurs d'écoulement dans la zone fondue.

L'effet Marangoni est une résultante de la variation de la tension superficielle sur l'interface liquide - plasma. La tension de surface ou interfaciale  $\gamma$  caractérise le travail nécessaire pour modifier la forme d'une interface entre deux milieux. Donc, un gradient  $\frac{\partial\gamma}{\partial X} = \frac{\partial\gamma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial X}$  de cette tension (figure 1.7) génère un écoulement surfacique. L'orientation de cet écoulement dépend du signe de la variation  $\frac{\partial\gamma}{\partial T}$ . Comme l'illustre le schéma de la figure 1.7, l'écoulement est orienté vers l'intérieur (convection centripète) si  $\frac{\partial\gamma}{\partial T}$  est positif et vers l'extérieur (convection centrifuge) s'il est négatif, modifiant ainsi la forme générale du cordon de soudure.

La tension de surface dépend de la température ainsi que de la concentration ( $a_i$ ) en éléments tensioactifs (soufre, oxygène, etc.). Or, dans le cadre du soudage, les gradients de température sont particulièrement importants et certains éléments tensioactifs sont présents dans le matériau comme le soufre ou le phosphore dans l'acier AISI 316L. Cet effet a donc été largement étudié dans la littérature, soit de façon expérimentale ([4],[81]), soit de façon numérique ([123], [122],[133]) ou bien les deux ([30], [126]).

La prise en compte de cet effet lors du calcul du champ de vitesse se fait en égalisant les contraintes tangentielles aux forces de tension superficielle (1.10) sur l'interface entre les deux milieux.

$$\sigma_\tau = -\mu \frac{\partial V_\tau}{\partial n} = \frac{\partial\gamma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \left( \frac{\partial\gamma}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial \tau} \right) \quad (1.10)$$

avec  $V_\tau$  la composante tangentielle de la vitesse.  $\tau$  et  $n$  les axes, respectivement, tangent et normal à la frontière. Le terme entre parenthèses permet la prise en compte de la variation de la concentration de l'élément tensioactif à la surface du bain liquide ( $a_i$ ).

P. Sahoo et al. ([107]) précisent les différentes étapes le conduisant à une formulation de la tension superficielle. La formulation retenue est issue de la relation d'adsorption isotherme de Gibbs-Langmuir (1.11) faisant intervenir la température et la concentration (massique  $a_i$ ) de l'élément tensioactif.

$$\gamma = \gamma_m^0 - A(T - T_{fus}) - RT\Gamma_s \ln \left[ 1 + k_l a_i e^{-\frac{\Delta H^o}{RT}} \right] \quad (1.11)$$

Une représentation graphique de cette expression a, par exemple, été proposée pour différentes concentrations initiales de soufre dans le fer par Y. Wang et al. ([122]).

La figure 1.8 déduite des paramètres proposés par P. Sahoo [107], illustre qu'une augmentation de la concentration de soufre entraîne une augmentation de la température à laquelle la variation  $\partial\gamma/\partial T$  s'annule et donc modifie l'orientation de l'écoulement en surface.

La variation de  $\gamma$  par rapport à la température s'écrit :

$$\frac{\partial\gamma}{\partial T} = -A - R\Gamma_s \ln(1 + K_g a_i) - \frac{K_g a_i}{(1 + K_g a_i)} \frac{\Gamma_s \Delta H^o}{T} \quad (1.12)$$

$$K_g = k_l \exp \left( -\frac{\Delta H^o}{RT} \right) \quad (1.13)$$

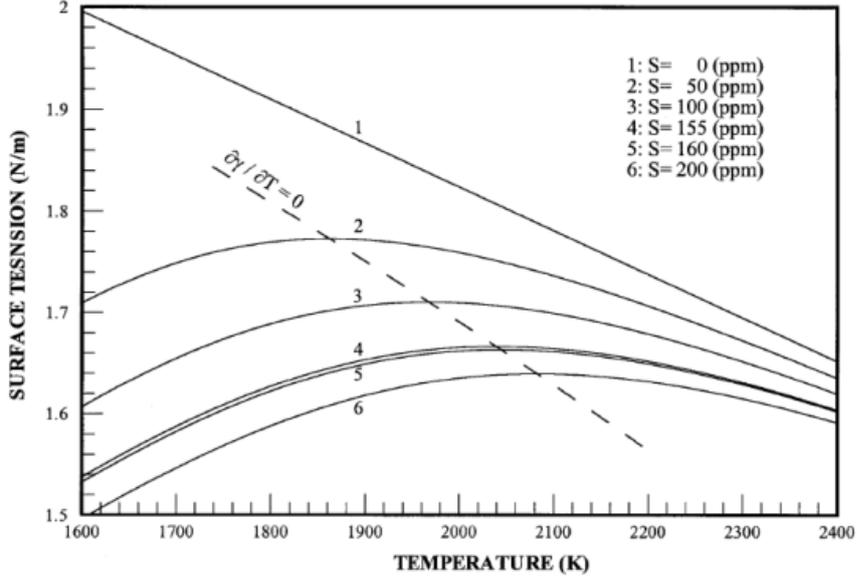


Figure 1.8 – Représentation de la tension de surface pour différentes concentrations de soufre dans le système binaire FeS [122]

avec :  $k_l$  une constante liée à l'entropie de ségrégation,  $\Delta H^o$  l'enthalpie standard d'adsorption,  $\Delta \bar{H}_i^M$  l'enthalpie molaire partielle du mélange de l'espèce  $i$ ,  $\Gamma_s$  l'excès de saturation en surface,  $a_i$  l'activité de l'espèce  $i$  (pourcentage massique),  $\gamma_m^o$  la tension de surface du métal pur,  $A$  la valeur (négative) de  $\partial\gamma/\partial T$  du métal pur et  $T_{fus}$  la température de fusion du métal. L'auteur, P. Sahoo, fournit les valeurs de ces paramètres pour différents mélanges binaires comme dans le cas du soufre ou de l'oxygène dans le fer ou le cuivre.

**La flottabilité** ou convection naturelle est une force volumique ascendante (figure 1.7) causée par la variation de masse volumique d'un fluide en fonction de sa température. Or, dans la grande majorité des études numériques, le métal liquide est considéré comme incompressible. Il est alors courant d'utiliser les approximations de Boussinesq pour prendre en compte le phénomène de convection naturelle. À savoir, la masse volumique est considérée constante sauf pour le terme de flottabilité, dans lequel une évolution linéaire de la masse volumique en fonction de la température est proposée (1.14).

$$\vec{F}_{Boussinesq} = -\rho_{fus}\beta(T - T_{fus})\vec{g} \quad (1.14)$$

avec :  $\rho_{fus}$  la masse volumique du métal liquide à la température de fusion  $T_{fus}$ ,  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $\beta$  le coefficient d'expansion volumique.

#### La force de cisaillement due à l'écoulement du plasma

L'écoulement du gaz de protection sur la surface de la zone fondue génère une force surfacique tangentielle sur la surface de la zone fondue. Cette force est généralement déterminée de façon numérique. Par exemple, W. H. Kim et al. ([68]) l'affichent, en fonction du rayon, en tant que résultat d'un modèle d'arc (figure 1.9) et H.G. Fan et al. ([40]) se servent d'une courbe du même type (figure 1.10) en tant que donnée d'entrée d'un modèle d'anode.

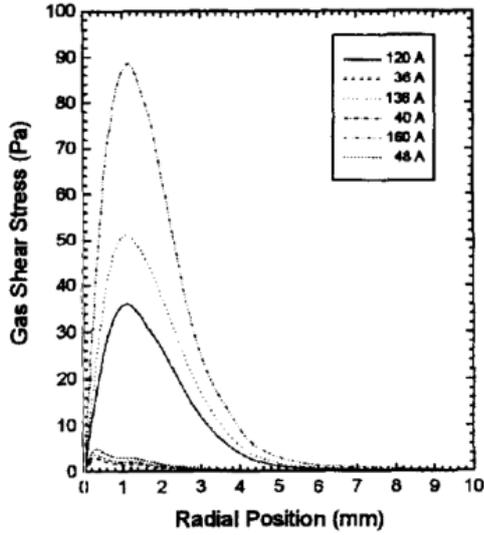


Figure 1.9 – Amplitude de la force de cisaillement sur la surface de l’anode pour différents courants ([68])

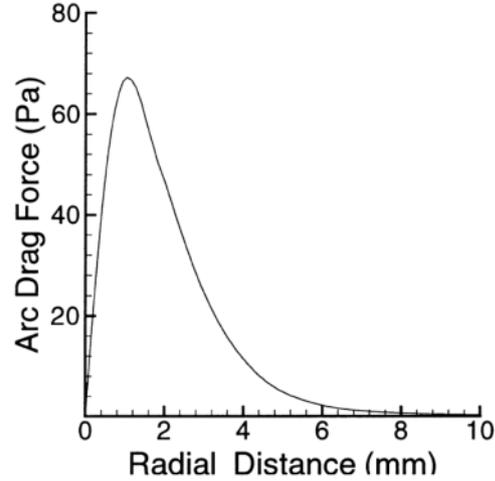


Figure 1.10 – Force de cisaillement proposée par H.G. Fan ([40]) (courant : 150 A, hauteur d’arc 3 mm )

Les forces électromagnétiques ou forces de Lorentz sont générées par l’interaction, dans le métal liquide, du champ magnétique auto-induit avec le passage du courant électrique. Elles sont des forces volumiques descendantes orientées vers le centre de la zone fondue (figure 1.7).

$$\vec{F}_{Lorentz} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.15)$$

La détermination de cette force peut être effectuée de manière numérique ou analytique. Par exemple, A. Kumar et al. ([71]) ajoutent la prise en compte de cette force à une simulation numérique déjà éprouvée et valident leurs résultats en comparant la position de l’interface obtenue numériquement avec une observation de macrographie. Dans leur étude, ils comparent les forces de Lorentz obtenues numériquement avec celles obtenues analytiquement. Ils concluent que, dans un contexte réaliste, les simplifications nécessaires à la résolution du problème analytique sont pénalisantes quant à la représentativité des zones fondues obtenues.

A. Berthier et al. ([15]) présentent une comparaison de résultats obtenus avec et sans cette force. Ils montrent que même si les forces thermocapillaires (Marangoni) sont prédominantes sur la forme de cordon de soudure, les forces électromagnétiques ont une importance non négligeable sur la profondeur de pénétration.

### La représentation de la frontière liquide - solide

Le problème de mécanique des fluides est défini à l’aide d’une formulation Eulérienne (le maillage reste fixe), ce qui entraîne une difficulté liée à la propagation de l’interface séparant la phase liquide de la phase solide. En général, la méthode employée pour surmonter ce problème est de résoudre l’équation de Navier-Stokes dans les deux phases mais d’annuler artificiellement

le champ de vitesse dans la phase solide. Pour ce faire, plusieurs moyens sont possibles :

- La modification de la viscosité dans la zone pâteuse ( $\mu_S \rightarrow \infty$  [7] [91] ou [110]).
- L'application de l'hypothèse de perméabilité dans la zone pâteuse et la génération d'une source volumique infinie dans le solide (Condition de Darcy).

La loi de Darcy qui, associée à l'expression de Carman-Kozeny ([24]), a largement été utilisée dans le domaine du soudage ([122], [131], [127] ou [92]). Cette approche, appelée "enthalpie/porosité" par A.D. Brent et al. ([20]) est basée sur l'hypothèse de perméabilité dans la zone pâteuse qui implique la prise en compte de la croissance dendritique. De façon analogue à l'analyse d'écoulement en milieu poreux, elle vise à représenter l'écoulement dans la zone de transition liquide - solide. La construction de cette condition se fait par la définition d'un vecteur source  $\vec{S}$  (1.16) intervenant dans le terme  $\vec{f}_v$  des équations de conservation de mouvement (1.9). Il permet l'annulation du champ de vitesse dans la phase solide sans l'influencer dans la phase liquide.

$$\vec{S} = \frac{\mu_L}{K} \vec{V} \quad (1.16)$$

avec  $\mu_L$  la viscosité dynamique du fluide considéré. La perméabilité  $K$  est définie de manière semblable à l'équation de Karman-Kozeny (écoulement en milieu poreux) :

$$K = \frac{f_L^3}{c_l(1-f_L)^2} \approx \frac{b+f_L^3}{c_l(1-f_L)^2} \quad (1.17)$$

avec  $f_L$  la fraction volumique de liquide.

Précisons qu'un terme d'inertie ([20], [122], [56]) peut être ajouté à l'équation 1.16 pour représenter les phénomènes inertiels (la surfusion par exemple).

Dans l'expression (1.17),  $b$  est un coefficient très faible, purement arbitraire, dont la fonction est d'éviter les divisions par zéro dans le solide.  $c_l$  est une constante de valeur importante qui peut être exprimée en fonction de  $d$  la longueur dendritique moyenne (de l'ordre de  $1.10^{-4}m$  dans [20] ou [122]). Une valeur de  $c_l = 1,6.10^4$  est par exemple utilisée par Zhang et al. ([131]).

$$c_l = \frac{180}{d^2} \quad (1.18)$$

Étant donné l'objectif de ce paramètre, il est parfois imposé de manière arbitraire à une valeur très importante par exemple à  $1.10^{10}$  ([21]).

La fraction liquide  $f_L$ , qui représente la quantité relative de liquide dans la zone pâteuse, peut être exprimée par une fonction linéaire de la température (1.19). Cette formulation simplifiée est observée dans de nombreux articles ([127], [93], [122], [131], [33], [56],...).

$$f_L = \begin{cases} 1 & T > T_L \\ \frac{T-T_S}{T_L-T_S} & T_S \geq T \geq T_L \\ 0 & T < T_S \end{cases} \quad (1.19)$$

Rappelons que cette fraction liquide peut être utilisée pour représenter la libération ou l'absorption de la chaleur latente. Cette écriture est applicable de la même manière lorsque le problème thermique est résolu en enthalpie ([78], [122]).

### Problème électromagnétique - équations de Maxwell

Les équations de Maxwell seront présentées dans le chapitre 2 lors de la définition du problème électromagnétique. Elles ne sont donc pas exposées ici. Néanmoins, précisons quelles sont les approches les plus couramment utilisées.

Dans la littérature, plusieurs écritures peuvent être observées. Le problème peut être résolu, soit en densité de courant  $\vec{j}$  ou potentiel  $\phi$  ([71], [68], [33], [40], [56]), soit en induction magnétique  $\vec{B}$  ([16], [115]). Cette disparité vient du fait que l'objectif final est la détermination de la force de Lorentz qui est une fonction de  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$ . Ces deux inconnues étant directement liées l'une à l'autre, la détermination de l'une permet le calcul de l'autre.

Une étude comparative entre ces deux modes de représentation est effectuée par M.A. Ramirez et al. ([104]) pour un modèle d'arc. Ils obtiennent des résultats très proches avec les deux formulations. Cependant, dans leur cas, la formulation en densité de courant a fourni des résultats plus proches de la réalité en raison de difficultés numériques relatives à la formulation en induction.

#### L'apport de densité de courant

Pour le problème électromagnétique, comme pour le problème de transferts thermiques, la source de courant électrique peut être définie, soit par rapport à des données provenant d'un modèle d'arc, soit par une loi gaussienne. En effet, les travaux présentés pour la définition de la source de chaleur, fournissent aussi des informations pour la source du problème électromagnétique. De plus, comme le montrent N.S Tsai et al. ([119]) un lien peut être observé entre les deux phénomènes.

### Déformation de la frontière plasma - liquide

Comme tous les liquides, le métal fondu possède une frontière libre dont la forme minimise l'énergie totale. Lorsque le courant électrique est important, la déformation de la surface du bain en raison de la pression de l'arc ne peut plus être négligée dans la modélisation. Il faut alors considérer l'ensemble des forces s'exerçant sur cette surface libre (figure 1.11), à savoir les forces de tension superficielle ( $\vec{F}_\gamma$ ), de pesanteur ( $\vec{F}_g$ ), la force due à la pression de l'arc ( $F_{arc}$ ) ainsi que les effets dus au mouvement du liquide (pression dynamique) ( $F_{dyn}$ ) ou du gaz de protection ( $\vec{F}_\tau$ ) (cisaillement en surface de bain).

Compte tenu de l'équilibre existant sur cette frontière et de la conservation du volume fondu, il est possible d'écrire une relation entre les forces et la position de l'interface.

De manière générale, dans la littérature relative au soudage, la position de la frontière est déterminée de façon statique. De ce fait, les termes de pression dynamique et donc les effets

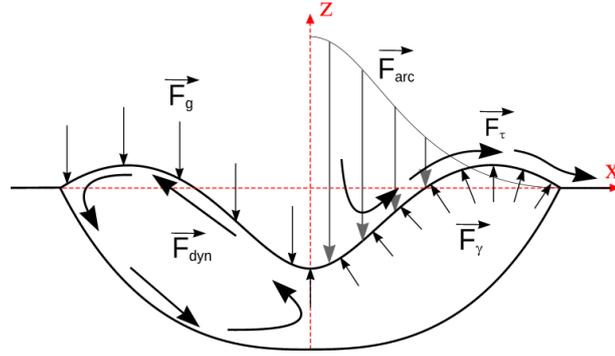


Figure 1.11 – Bilan des forces en surface de zone fondue

convectifs sont négligés. Par exemple, M.L. Lin et al. ([83]) ont défini une modélisation de la déformation après avoir montré expérimentalement ([82]) l'influence de la pression de l'arc et l'effet de la convection dans le cadre du soudage TIG. Leur modèle ne tient compte que de l'énergie de tension de surface, du travail dû à la pression de l'arc et de l'énergie potentielle de pesanteur. Suite à ces travaux, ils présentent les résultats d'une étude expérimentale visant à mesurer la pression de l'arc ([84]).

C.S. WU et al. ([125]) partent de cette formulation pour définir la forme de la frontière inférieure apparaissant lors de soudage débouchant. Dans ce cas, le terme lié à la pression de l'arc est supprimé. Cette approche est aussi appliquée dans de nombreuses autres études ([80], [73] ou [86]) en raison de sa simplicité de réalisation. Cependant, il est aussi possible de la voir appliquée à des études transitoires ([40] ou [115]) négligeant ainsi les effets dynamiques de l'écoulement dans le bain sur la forme de la surface libre.

L'expression la plus répandue est la suivante :

$$\gamma\kappa = \rho g\psi - P_{arc} + \mathcal{L}_m \quad (1.20)$$

avec :  $\gamma$  la tension de surface,  $\kappa$  la courbure de la frontière,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $\psi$  la position de la frontière et  $\mathcal{L}_m$  un multiplicateur de Lagrange permettant de satisfaire la conservation du volume liquide.

D'autres méthodes peuvent être appliquées pour déterminer la position de la surface libre, notamment en régime transitoire. Par exemple, la méthode VOF (Volume Of Fluid) est appliquée dans les travaux de J. Hu et al. ([56]) et Y. Wang et al. ([122]). Notons que, dans les deux études, il s'agit de soudage avec apport de matière. L'avantage de la méthode VOF est de pouvoir prendre en compte, dans le calcul de la déformation, la pression dynamique grâce à la résolution des équations de la mécanique des fluides dans le bain liquide.

Dans tous les cas, la forte dépendance de la forme de la frontière à la pression de l'arc en fait un paramètre particulièrement important. Certains travaux sont donc dédiés à la détermination de cette pression. Elle peut être quantifiée de manière expérimentale ([84]), ou être calculée par l'intermédiaire d'un modèle d'arc ([38], [39]).

#### 1.4.1.4 Quelques observations expérimentales et numériques

Les équations de base, relatives à la partie anode, étant posées, quelques travaux vont être analysés. Compte tenu des observations, un choix sera fait quant aux phénomènes à représenter ainsi qu'à la manière dont ils sont traités numériquement.

##### Régime pulsé

Les travaux de A. Tradia et al. ([115]), observent l'influence d'une pulsation (2 Hz) du courant sur les formes de zones fondues ainsi que sur l'énergie dépensée au cours du soudage. Le matériau considéré est un acier inoxydable austénitique AISI 304L contenant 72 ppm de soufre (tensioactif). Ils comparent les résultats numériques (modélisation de l'anode) et expérimentaux sur des gammes de courants (et tensions) centrées sur 140 A : 120 A-160 A, 100 A-180 A et 80 A-200 A.

Numériquement, les phénomènes en présence sont supposés axisymétriques et les problèmes de transferts thermiques et de mécanique des fluides sont sous des formes classiques. Le problème électromagnétique est formulé en induction magnétique. Les propriétés thermo-physiques sont supposées constantes mais différentes dans chaque phase. La déformation de la surface libre n'est prise en compte qu'a posteriori. Elle n'a donc pas d'effet sur la détermination de la forme de zone fondue. La figure 1.12, issue de leur article, illustre la bonne adéquation des formes de zones fondues de leurs simulations avec des macrographies. Ils montrent l'intérêt d'un courant pulsé sur ce type de procédé en terme de profondeur de pénétration et d'énergie dépensée.

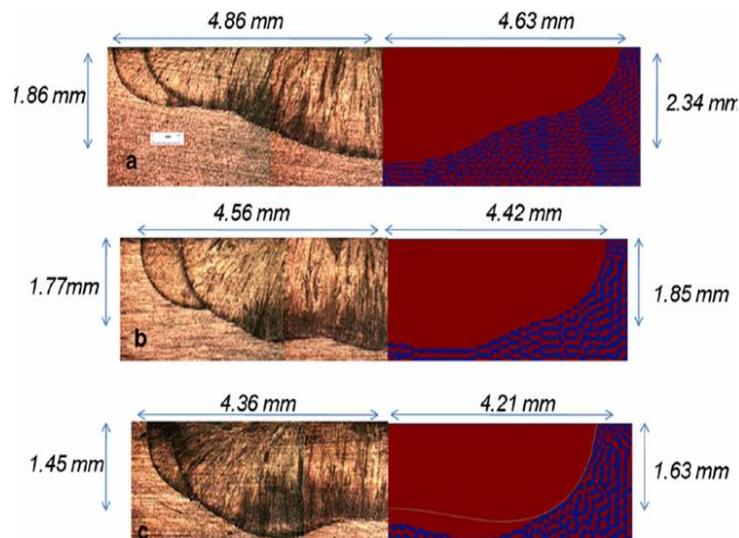


Figure 1.12 – Zones fondues expérimentales et numériques pour les courants de (a)80 A-200 A, (b)100 A/180 A et (c) 120 A/160 A [115].

Quelques informations semblent cependant inhabituelles, par exemple, la viscosité dynamique du liquide est choisie égale à  $0,05 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Or, dans d'autres travaux ([65], [90]) les valeurs annoncées pour cet acier sont plutôt de l'ordre de  $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Ce modèle étant décrit de manière très détaillée dans l'article et comportant une configuration expérimentale proche de celle envisagée dans le cadre de cette thèse, il sera utilisé pour valider notre modélisation (chapitre 2).

### Pression d'arc

D. Fan et al. ([38]) présentent des résultats expérimentaux (figure 1.13) et numériques (figure 1.14) relatifs à la distribution de la pression de l'arc. En l'occurrence, ils montrent que pour de faibles courants ( $< 250 A$ ) la distribution de la pression de l'arc peut être représentée par une distribution gaussienne. Cependant, un bon accord entre modèle et expérience n'est obtenu que pour de faibles hauteurs d'arc.

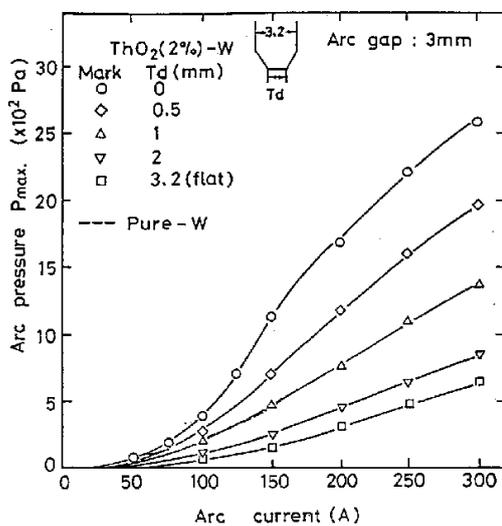


Figure 1.13 – Pression mesurée sur l'axe en fonction du courant ([38])

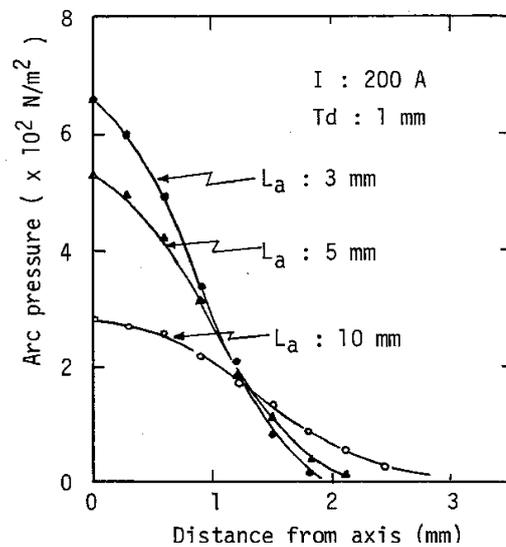


Figure 1.14 – Distribution de pression calculée ([38])

D'un point de vue qualitatif, les informations qui ressortent de cet article sont une augmentation de la pression maximale de l'arc avec :

- l'augmentation de l'amplitude du courant électrique,
- la décroissance de la hauteur d'arc,
- la décroissance de la largeur du méplat en pointe d'électrode ( $T_d$  sur la figure 1.13).

La même année, M.L. Lin et al. ([84]) présentent des résultats expérimentaux pour des courants plus importants et observent un comportement similaire. Ils étudient également, l'effet de l'angle d'affûtage de l'électrode et signalent une réduction de la pression avec l'augmentation de l'angle.

### L'effet Marangoni - observation expérimentale

L'effet Marangoni est expérimentalement étudié par D.K. Aidun ([4]). Les matériaux con-

sidérés sont des déclinaisons (Low Sulfur, High Sulfur, Commercial) des aciers inoxydables 304 et 316.

La fusion est obtenue par l'application de deux procédés, TIG et laser. Les paramètres procédés relatifs à l'arc sont : 120 A, 14 V et une hauteur d'arc de 1 mm.

Leur analyse porte sur les formes de zones fondues observées sur des coupes macrographiques. Un lien est fait entre les concentrations de flux activant (soufre dans le matériau et oxygène dans le gaz de protection) et le rapport  $\frac{D}{W}$  (pénétration sur largeur de bain). En l'occurrence, ils observent une augmentation du rapport  $\frac{D}{W}$  donc un bain plus pénétrant pour un taux de soufre important. De plus, l'oxygène entraîne une augmentation de l'activité en surface et amplifie donc la profondeur de pénétration, et ce, de façon plus importante que le soufre.

### Le rendement de l'arc

Le rendement de l'arc ( $\eta$ ) est défini comme étant le rapport de l'énergie thermique transmise à la pièce à souder sur l'énergie électrique entrant dans le procédé. Principalement associé aux modélisations avec une source équivalente, et étant particulièrement difficile à mesurer, il peut être déterminé numériquement.

M. Brochard ([21]) réalise, suite à la définition d'une modélisation unifiée du soudage TIG, un plan d'expériences numériques pour lequel il prend comme observable le rendement du procédé. Les facteurs étudiés sont : le courant ( $I$ ), l'angle d'affûtage de l'électrode ( $\alpha$ ) et la hauteur d'arc ( $h$ ). Le tableau 1.1 donne pour les différentes configurations la valeur du rendement calculé par son modèle unifié.

Essais	Rendements de l'arc (%)
I=150 A, $\alpha = 60^\circ$ , h=5 mm	69,42
I=150 A, $\alpha = 30^\circ$ , h=5 mm	72,84
I=100 A, $\alpha = 30^\circ$ , h=5 mm	76,95
I=100 A, $\alpha = 60^\circ$ , h=5 mm	73,77
I=150 A, $\alpha = 60^\circ$ , h=3 mm	74,65
I=150 A, $\alpha = 30^\circ$ , h=3 mm	73,96
I=100 A, $\alpha = 30^\circ$ , h=3 mm	76,95
I=100 A, $\alpha = 60^\circ$ , h=3 mm	80,47
I=125 A, $\alpha = 45^\circ$ , h=4 mm	76,98

Tableau 1.1 – Rendements calculés en fonction de  $I$ ,  $\alpha$  et  $h$  [21]

Sans entrer dans les détails de la définition et du traitement du plan d'expériences, l'analyse de ses résultats montre que l'augmentation des trois facteurs induit une diminution du rendement.

Notons que ces valeurs de rendement, propre au procédé, sont confirmées par les données de J.N. DuPont et al. ([35]). Expérimentalement, ils mesurent des rendements de l'ordre de 70% pour des courants électriques supérieurs à 200 A.

### 1.4.1.5 Conclusion

Étudié depuis longtemps, le procédé de soudage TIG fait toujours l'objet de nombreux travaux de recherche. La représentation stationnaire est aujourd'hui assez bien définie, néanmoins, les aspects fortement transitoires restent mal maîtrisés.

Les informations générales présentées ici, associées au traitement quantitatif qui sera réalisé dans le chapitre 2, permettront de définir une modélisation multiphysique des phénomènes présents dans l'anode lors de l'application statique d'un procédé TIG.

Malgré les évolutions rapides des outils informatiques, les résolutions multiphysiques restent en général coûteuses en temps de calcul. De ce fait, des simplifications des phénomènes présents dans la zone fondue peuvent être appliquées, notamment en utilisant la notion de source équivalente.

### 1.4.2 Approche “source équivalente”

Ce type d'approche vise à simplifier l'étude d'un problème de soudage en réduisant les phénomènes physiques représentés. Rappelons, que les informations recherchées, lors de la simulation numérique, concernent principalement les effets mécaniques [109][64]. Un problème couplant les transferts thermiques, la mécanique des fluides et l'électromagnétisme seront, par exemple, réduits à un problème de transferts thermiques conductifs purs. Or, la mécanique des fluides a des effets sur l'évolution de la forme de la zone fondue. Un terme source, surfacique ou volumique, dans le problème thermique, devra rendre compte de l'apport de chaleur de l'arc mais aussi de sa redistribution au sein du bain sous l'effet des mouvements convectifs. Cette source est qualifiée de *source équivalente*.

Les expressions mathématiques de ces sources ne sont pas construites sur des principes physiques ou ne le sont que partiellement. Pour que l'apport de chaleur entraîne le développement d'une zone fondue représentative du procédé, la distribution (numérique) de l'énergie doit être adaptée. Pour cette raison, les simulations de ce type sont généralement couplées à la résolution d'un problème inverse visant à identifier ces paramètres.

La forte simplification de cette approche, associée à d'autres approximations telles que des propriétés thermophysiques constantes, permet aussi de traiter les simulations thermiques analytiquement ([69]).

#### 1.4.2.1 Les termes sources

La définition de la source thermique dépend du procédé ainsi que des simplifications réalisées. Une grande variété de distributions peut donc être rencontrée. Nous en répertorions quelques-unes en fonction de leurs dimensions : monodimensionnelles, surfaciques et volumiques.

Grâce à leur simplicité, les sources ponctuelle et linéique (1.21<sup>3</sup>) (dans l'épaisseur) proposées par Rosenthal ([106]) ont été particulièrement appliquées dans des résolutions analytiques :

$$S(x, y, z, t) = \frac{\eta UI}{e} \delta(x - x_s) \delta(y - v_s t) \quad (1.21)$$

avec  $x_s$  la position de la source sur l'axe  $x$ ,  $v_s$  la vitesse d'avance de la source,  $e$  la profondeur d'application de la source,  $t$  le temps et  $\delta()$  la fonction de Dirac. Bien que non physique, les sources équivalentes sont exprimées en fonction des paramètres opératoires  $U$  et  $I$  ainsi que du rendement  $\eta$ .

La puissance étant distribuée selon une impulsion de Dirac, la température est localement infinie. Les écarts entre expérience et modèle sont, par conséquent, non négligeables au voisinage de la source. Des modèles de sources plus élaborés ont donc été développés par la suite.

Les sources surfaciques constantes ou de type Gaussien simple (1.22) évitent le problème de température infinie, mais ne permettent pas de rendre compte des effets convectifs. Elles sont donc, elles aussi peu réalistes.

$$S(x, y, z, t) = d \frac{\eta UI}{\pi \sigma_{eq}^2} \exp\left(-d \frac{(x - x_s)^2 + (y - v_s t)^2}{\sigma_{eq}^2}\right) \quad (1.22)$$

avec  $d$  le paramètre de distribution,  $\sigma_{eq}$  l'écart-type de la distribution,  $x_s$  la position sur l'axe  $x$  de la source et  $v_s$  sa vitesse.

Des améliorations de ces distributions ont été proposées dans la littérature. Par exemple, N. Kerrouault ([64]) a utilisé une source surfacique annulaire (1.23) (figure 1.15) amenant à une zone fondue particulièrement représentative du procédé TIG, dont l'expression est la suivante :

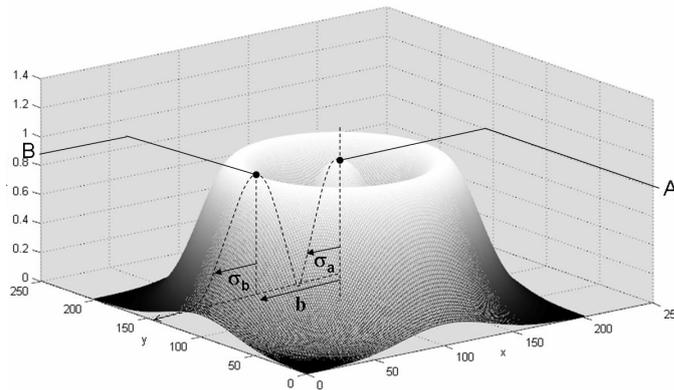


Figure 1.15 – Exemple de distribution spatiale pour une source annulaire

$$S(x, y, z, t) = A \exp\left(-\frac{r_s^2}{\sigma_a^2}\right) + B \exp\left(-\frac{(r_s - b)^2}{\sigma_b^2}\right) \quad (1.23)$$

3. Dans ce paragraphe, les expressions des sources sont définies dans un repère cartésien  $(O, x, y, z)$ , où  $(Ox)$  est la direction transverse,  $(Oy)$  la direction longitudinale et  $-(Oz)$  la profondeur.

## 1.4 La modélisation du soudage

avec :  $r_s = \sqrt{((x - x_s)^2 + (y - v_s t)^2)}$ . Cette source est composée de deux lois Gaussiennes pour lesquelles  $A$  et  $B$  sont des constantes qui définissent les amplitudes de chaque maximum,  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  contrôlent les distributions et  $b$  permet de définir la largeur de "l'anneau".

Une distribution volumique de l'énergie est parfois appliquée. Par exemple, une source de Goldak ([46]) est décomposée en deux parties (1.24) afin de distinguer les apports de chaleur à l'avant et à l'arrière du bain. Cette approche permet de prendre en compte l'effet de l'écoulement du bain qui redistribue une partie de l'énergie de l'arc vers l'arrière lors de l'avancée du procédé (figure 1.16<sup>4</sup>) :

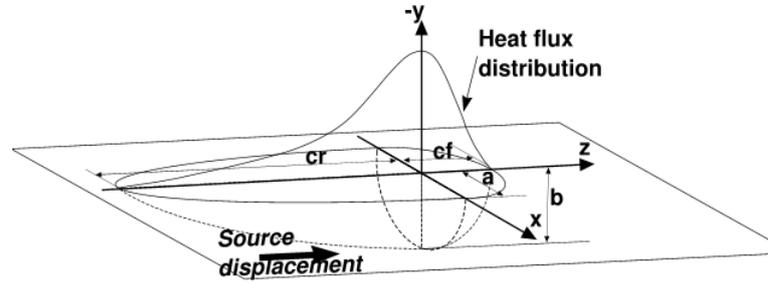


Figure 1.16 – Schéma de distribution de la source de Goldak

$$S_{av}(x, y, z, t) = f_{av} \frac{6\sqrt{3}\eta UI}{abc\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(x - x_s)^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{(y - y_s)^2}{b^2}\right) \exp\left(-\frac{(z - v_s t)^2}{c_f^2}\right)$$

$$S_{ar}(x, y, z, t) = f_{ar} \frac{6\sqrt{3}\eta UI}{abc\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(x - x_s)^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{(y - y_s)^2}{b^2}\right) \exp\left(-\frac{(z - v_s t)^2}{c_r^2}\right) \quad (1.24)$$

avec :  $f_{av}$  et  $f_{ar}$  ( $f_{av} + f_{ar} = 2$ ) les coefficients de répartition de l'énergie sur la partie avant et arrière. Les rayons  $a$ ,  $b$ ,  $c_f$  et  $c_r$  caractérisent les ellipses avant et arrière.

La source CIN (Cylindrical Involution Normal) développée par E. Ranatowski et K. Ciechaki ([105]) distribue l'énergie dans le volume par l'intermédiaire de deux paramètres (1.25) :  $K_z$  le facteur d'involution et  $k$  le facteur de concentration.

$$S(x, y, z, t) = \frac{kK_z\eta UI}{\pi [1 - e^{-K_z e}]} \exp(-k[(x - x_s)^2 + (y - v_s t)^2] - K_z(z - z_s)) [1 - u(z + e)] \quad (1.25)$$

4. Pour la figure 1.16 et les équations 1.24, le repère est différent de celui utilisé dans le reste de cette présentation, ici le procédé avance dans la direction  $z$ .

Cette expression offre la possibilité de représenter un grand nombre de formes. Par exemple, en considérant une épaisseur  $e$  nulle, la source devient surfacique. De même, l'énergie peut être distribuée sur un cylindre, un cône ou une ovoïde, et cela en ajustant les coefficients  $k$  et  $K_z$ .

Les deux dernières sources étant relativement "flexibles", elles sont couramment utilisées dans les travaux d'estimation de termes sources.

### 1.4.3 Approche "front de fusion"

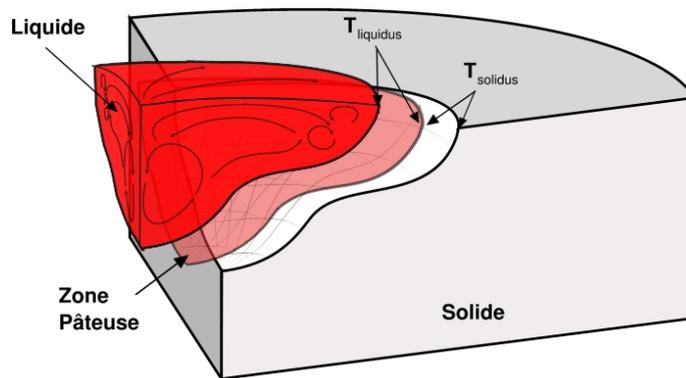


Figure 1.17 – Représentation schématique des zones liquide, solide et pâteuse

L'approche "front de fusion" consiste à ne modéliser que le domaine représentatif de la phase solide (figure 1.17). En effet, les simulations multiphysiques sont longues en terme de durée de résolution. Étant donné les notions physiques en présence, elles sont aussi longues à mettre en place de façon cohérente. Aussi, l'utilisation de sources équivalentes simplifie grandement les problèmes numériques, cependant, l'hypothèse qui est émise sur le flux thermique dans la phase liquide influence les valeurs calculées de flux transmis dans la phase solide.

De plus, une autre difficulté réside dans le suivi du front de fusion et le choix de la méthode à mettre en œuvre. Nous plaçons alors l'étude dans le contexte d'un problème de Stefan. Dans le cadre du soudage, c'est par exemple cette approche qui a été retenue par D.D. Doan ([31]). Il traite un cas de soudage transitoire tri-dimensionnel qu'il place dans le repère de la source (régime quasistationnaire). Ne modélisant que la phase solide, cette méthode a pour finalité une estimation de la position du front. En effet, ce dernier est considéré comme une frontière isotherme de géométrie paramétrée. Il présente des résultats très satisfaisants en terme d'estimation de la position du front [32] et compare la méthode à celle de source équivalente.

Le principe de cette simplification est d'imposer la température de fusion sur la frontière liquide - solide. Évidemment la position de cette frontière doit être connue. Il s'agit donc de l'estimer par méthode inverse.

La validité de cette méthode s'explique par les notions suivantes :

- En régime stationnaire (ou quasistationnaire), d’après la loi de Fourier (1.26), l’amplitude du vecteur flux de chaleur dans le solide est directement proportionnel au gradient de température  $\vec{\nabla}T$ . De plus, pour une fonction quelconque, le champ de vecteur gradient donne la direction normale de ses courbes de niveaux. Appliquée à la thermique, cela signifie que le flux est normal aux isothermes. Donc, imposer la position d’une ligne isotherme revient à imposer la direction du flux et la valeur de la température conditionne l’amplitude de ce flux.

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla}T \quad (1.26)$$

- En régime transitoire s’ajoute la notion d’évolution temporelle. De la même manière qu’en régime stationnaire, le fait d’imposer le déplacement d’une ligne isotherme dans le solide permet de conditionner l’évolution temporelle du flux de chaleur.

La difficulté dans ce type de travaux ne porte pas sur la simulation elle-même mais plutôt sur l’estimation de la position de l’interface. Par exemple, une simulation stationnaire de diffusion thermique pure en trois dimensions est parfaitement abordable. Par contre, l’estimation de la position de la frontière nécessite quelques précautions. En l’occurrence, une paramétrisation de la surface est à définir. D.D. Doan propose et valide l’utilisation de courbes (ou surfaces) de Bézier ([31]). Initialement définies pour faciliter la conception assistée par ordinateur, les propriétés de continuité de ces courbes sont appropriées à la résolution d’un problème thermique et réduisent grandement le nombre de paramètres (les “points de contrôles”) à estimer.

D.D. Doan utilise une autre méthode pour le traitement du problème transitoire. En effet, les surfaces de Bézier sont constitutives de la géométrie de la pièce simulée, donc une résolution temporelle implique que chaque point de contrôle évolue à la vitesse d’avancée du front de fusion (solidification). N’étant pas réalisable, il applique la transformation “de Duvaut” qui permet une résolution numérique du problème thermique en maillage fixe. Cette méthode consiste à calculer une nouvelle variable représentant l’intégrale de la température par rapport au temps dans le solide et valant zéro dans le liquide. Le problème à résoudre devient alors une inéquation variationnelle.

### 1.4.4 Bilan sur les méthodes de simulation du soudage

Dans cette première partie de l’étude bibliographique, ont été présentées différentes voies rencontrées dans la littérature, relative à la simulation numérique des transferts thermiques lors du soudage. Chacune d’elles présente des avantages et inconvénients. De plus, elles peuvent avoir des objectifs différents.

- L’étude multiphysique a l’avantage de ne traiter que des phénomènes physiques, même s’ils sont plus ou moins faciles à mettre en données. C’est donc un avantage pour la validité des résultats obtenus mais c’est un inconvénient majeur en terme de temps de calcul. En effet, les multiples couplages qui apparaissent entre les différentes équations de conserva-

tion entraînent l'utilisation de ressources numériques importantes. De plus, cette approche demande une connaissance précise des propriétés thermophysiques des milieux représentés. L'intérêt de cette méthode est son caractère prédictif mais aussi elle facilite la compréhension de certains phénomènes physiques tout en permettant de quantifier leurs influences respectives.

- La simulation thermique avec source équivalente est bien moins exigeante d'un point de vue numérique. Elle fournit des résultats moins fiables et demande la connaissance des paramètres de la source utilisée. Cette connaissance peut être obtenue en calant manuellement les paramètres ou en les identifiant par méthode inverse. Dans les deux cas, des informations expérimentales sont nécessaires (température, macrographie).
- La simulation thermique avec "retrait du volume liquide" est obligatoirement associée à une méthode inverse, donc une étude expérimentale, afin de connaître les positions du front de fusion. Cependant, elle offre un compromis entre la validité de la solution (thermique) obtenue et la complexité de la simulation à réaliser.

Compte tenu de ces observations, et sachant que nous cherchons principalement à connaître l'évolution temporelle de la frontière liquide-solide ainsi que le champ de températures dans la phase solide (en prévision de calculs thermo-mécaniques), nous allons considérer à la fois la simulation multiphysique de l'anode et la méthode de retrait du volume liquide. À noter que, pour la première méthode, les informations disponibles dans la littérature sont plutôt en régime stationnaire (ou quasistationnaire). Pour la seconde méthode, la mise en œuvre d'une étude expérimentale est indispensable. De plus, elle implique que nous développons, dans cette étude bibliographique, une partie relative aux méthodes inverses.

## 1.5 Les problèmes inverses en transfert thermique

### 1.5.1 Introduction

De manière générale, un problème est dit inverse, si l'on cherche une donnée d'entrée d'un problème physique  $S$  à partir de ses données de sortie (observables). Cela implique la définition d'un modèle  $M$  représentatif de  $S$ . Dans le cadre des transferts thermiques (conductifs), les inconnues peuvent être :

- la géométrie du domaine,  $\Omega$  pour le volume et  $\Gamma$  pour une frontière,
- les conditions aux limites,  $T_\infty$  pour la température et  $\Phi$  pour un flux,
- la condition initiale,  $T_0$ ,
- la source volumique,  $S(x, y, z, t)$ ,
- les propriétés thermophysiques du matériau,  $\lambda(T)$ ,  $\rho(T)$  et  $cp(T)$ .

La résolution du problème inverse peut avoir plusieurs orientations : le "contrôle commande" ou l'"estimation de paramètres" (ou de fonctions). Le premier consiste à déterminer une ou plusieurs entrées pour placer le système dans un état souhaité. Le second permet la détermination

de paramètres (ou fonctions) propres à une expérimentation précise. La finalité n'est donc pas la même, l'un prévoit un résultat expérimental, l'autre détermine une de ses caractéristiques. Finalement, il est aussi possible d'appliquer une méthode inverse pour la définition d'une "optimale". Plutôt appliquée en vue d'une estimation de paramètres, elle aide à la détermination de la meilleure position des points de mesure.

### 1.5.2 Les modèles

En fonction de la complexité du système, deux formulations sont envisageables : sous forme d'équations d'état ou sous forme d'équations aux dérivées partielles.

#### 1.5.2.1 Équation d'état

Formuler un problème thermique sous forme d'équation d'état consiste à le mettre sous la forme :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (1.27)$$

pour  $t > t_0$  et avec  $X(t_0) = X_0$

$$y(t) = CX(t) \quad (1.28)$$

avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  des opérateurs matriciels,  $U(t)$  un vecteur de sollicitation et  $y(t)$  un vecteur de sortie (observable).  $X(t)$  est la variable d'état, en l'occurrence, la température.

En transferts thermiques, ce type d'écriture se prête particulièrement à l'étude théorique ou expérimentale de systèmes linéaires. De plus, ce formalisme général facilite son association à un problème inverse. Cependant, cette mise en forme matricielle demande une modélisation discrète (spatialement) du système et un contexte spécifique ou des simplifications numériques pour exprimer la variable  $X$  uniquement en fonction de sa dérivée temporelle  $\dot{X}$ .

#### 1.5.2.2 Équation aux dérivées partielles

Sous cette forme, le modèle n'est autre que l'équation de la chaleur, qui, pour un problème de conduction pure se met sous la forme de l'équation (1.29), dont la variable est  $T$  dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ .

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda(T) \vec{\nabla} T) + S \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, t_\infty] \quad (1.29)$$

avec soit des conditions aux limites de type Neumann (1.30), Dirichlet (1.31) ou Fourier (1.32) :

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = \Phi_N \quad \forall x \in \Gamma \quad \forall t \in [t_0, t_\infty] \quad (1.30)$$

$$T = T_D \quad \forall x \in \Gamma \quad \forall t \in [t_0, t_\infty] \quad (1.31)$$

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = h_{cv}(T - T_\infty) \quad \forall x \in \Gamma \quad \forall t \in [t_0, t_\infty] \quad (1.32)$$

Dans le cas où les propriétés thermophysiques et les perturbations extérieures ne sont pas des

fonctions de la température, le modèle devient linéaire. Le Laplacien peut alors être considéré comme un opérateur et la formulation localisée (1.27) s'applique. Dans le cas contraire, le système est non linéaire et sa résolution demande le développement d'outils de résolution numérique.

### 1.5.3 Un problème mal posé

Cette notion de problème mal posé correspond, au sens d'Hadamard, à des problèmes ne satisfaisant pas les conditions suivantes :

1. Existence d'une solution.

Pour un cas linéaire classique, si un modèle  $M$  (de paramètres structuraux  $e$ ) représentatif d'un système  $S$ , répond à une sollicitation  $s$  par une réponse  $R_{mod}$ , alors il est possible de le formuler de la manière suivante :

$$M(e)s = R_{mod} \quad (1.33)$$

$$Au = R_{mod} \quad (1.34)$$

avec :  $u$  l'inconnue et  $A$  un opérateur matriciel permettant l'expression explicite de  $u$ . Si  $R_{sys}$  est la réponse mesurable du système, l'objectif est de déterminer  $u$  pour avoir  $R_{mod} = R_{sys}$ . Soit,

$$Au = R_{sys} \quad (1.35)$$

Une solution classique est donc :

$$u = A^{-1}R_{sys} \quad (1.36)$$

Cette solution n'existe que si  $u$  et  $R_{sys}$  ont la même dimension,  $A$  est donc une matrice carrée dont la matrice inverse est obtenue par les méthodes classiques. Il faut également que la réponse  $R_{mod}$  puisse être obtenue à partir de  $A$ .

Si l'existence de la solution classique n'est pas validée, l'utilisation d'une "quasi-solution" (ou écart quadratique  $\|Au - R_{sys}\|^2$ ) est une alternative très utilisée. En effet, au sens des moindres carrés, il existe au moins une quasi-solution ([11]).

2. Unicité de la solution.

Il s'agit de la capacité de la solution à être unique, elle est assurée par l'utilisation d'information a priori.

3. Stabilité de la solution.

La stabilité de la solution doit être observée vis à vis d'une perturbation sur l'observable du système. En pratique, cela correspond au bruit sur une mesure de température. Ce bruit n'étant pas présent sur l'observable issu de la modélisation, une différence subsiste et entraîne une erreur sur l'estimé. Dans certains cas, le bruit sur la mesure provoque un bruit amplifié (dépend du nombre de conditionnement de  $A$ ) sur l'inconnue et perturbe la résolution du problème inverse. Cet effet est présenté succinctement pour un cas linéaire simple dans [117].

Cependant, certaines méthodes existent pour redonner un caractère bien posé à un problème ne validant pas une des conditions précédentes. Il s'agit alors de régularisation. Citons quelques exemples couramment utilisés :

- Régularisation par pénalisation, (Tikhonov - pénalisation de la fonction à minimiser) [53].
- Régularisation par troncature (retrait des hautes fréquences après décomposition spectrale) [52].

D'autres méthodes de régularisation existent. Cependant, elles demandent une formulation spécifique du problème inverse. Par exemple, la méthode **séquentielle de spécification de fonction** ([13]) pour laquelle la réduction d'un critère quadratique est réalisée à chaque pas de temps à partir d'informations issues de temps futurs. La **méthode itérative avec résolution d'un problème adjoint** est basée sur la méthode d'optimisation du gradient conjugué sous contrainte. La régularisation est dite itérative car, la résolution du problème inverse est elle-même itérative et les paramètres (ou les fonctions) sont supposés identifiés à une itération donnée (en fonction d'un critère). Cette itération est déterminée compte-tenu du "principe de l'écart" (discrepancy principle) ([6]).

Il est à noter qu'un problème, naturellement mal posé, peut être modifié pour être adapté à une analyse inverse. Néanmoins, les méthodes de régularisation ne transforment pas fondamentalement le système et sont généralement pondérées. De ce fait, un choix est à faire sur l'influence de la régularisation, en privilégiant soit l'estimabilité, soit la qualité de l'estimation.

La méthode de régularisation itérative associée à l'algorithme du gradient conjugué est présentée plus en détail dans le chapitre 3.

### 1.5.4 La démarche inverse

La figure 1.18 schématise une démarche inverse dans un cadre général. Cette démarche débute par la définition des inconnues à estimer. Ensuite, une mise en œuvre expérimentale est définie de façon théorique et un modèle mathématique est développé. Ce dernier a pour objectif de représenter au mieux le comportement du système physique pour permettre une comparaison cohérente d'observables. Le cas expérimental est ensuite effectué et les grandeurs observables sont mesurées. Pour finir, un algorithme inverse est utilisé pour déterminer les inconnues.

La résolution d'un problème inverse est perturbée par diverses erreurs résultant des interactions entre l'algorithme inverse, le problème direct et les mesures ([98]).

Une erreur globale peut être définie comme la somme de cinq erreurs provenant de différentes sources (1.37) :

$$e_G = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \quad (1.37)$$

Le problème direct est la modélisation mathématique d'un phénomène physique. Si les hypothèses utilisées pour la construction du modèle sont trop éloignées de la réalité, cela génère la

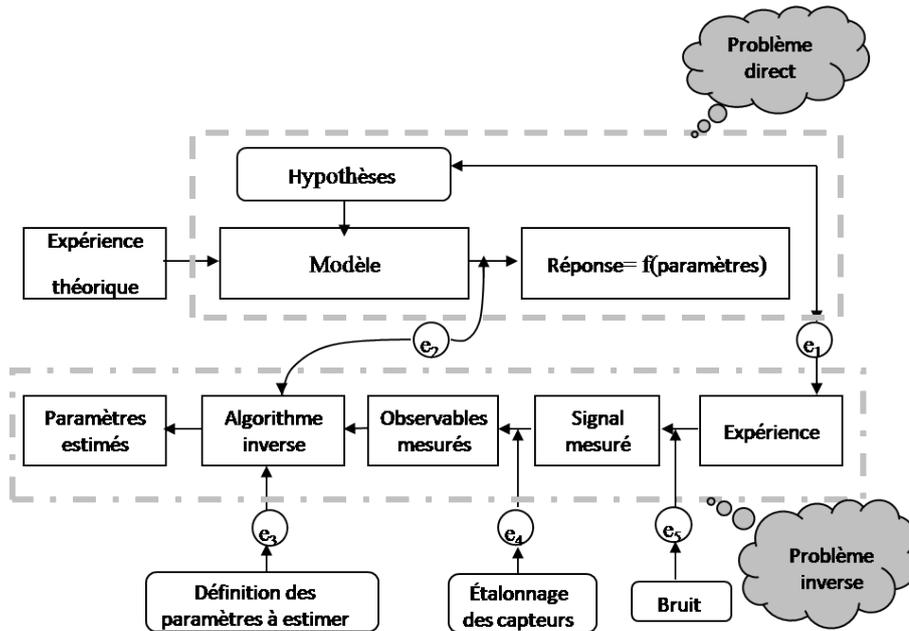


Figure 1.18 – Schéma d'une analyse inverse [98]

première erreur  $e_1$ . Si la résolution du problème direct se fait de manière numérique, des erreurs dues à la méthode de résolution peuvent apparaître sur les observables, il s'agit de  $e_2$ .

Ces deux premiers types d'erreurs sont liées au problème direct et elles apparaissent si le modèle est complexe ou les phénomènes mal maîtrisés.

La troisième erreur ( $e_3$ ) résulte de la définition du paramètre (ou de la fonction) à estimer (paramétrisation).

Pour finir, les deux dernières erreurs résultent du contexte expérimental. La première,  $e_4$  est liée à la chaîne d'acquisition et provient du traitement fourni par le capteur. Cette dernière est généralement qualifiée de bruit de mesure. La deuxième,  $e_5$  provient du capteur lui-même, de sa capacité à convertir le phénomène physique en grandeur observable (non linéarité, reproductibilité de la mesure, ...) ou de la perturbation qu'il engendre.

La gestion de ces différentes erreurs conditionne le résultat de l'inversion. Il est donc indispensable de les considérer très attentivement.

Notons que, dans notre étude, le problème inverse est résolu grâce à des mesures de température (chapitre 4). Une description globale des principaux phénomènes thermométriques a été réalisée par J.P Bardon et al. ([12]). Les précautions d'usage pour les mesures de température de surface y sont aussi présentées.

Rappelons les principales recommandations :

- Établir un compromis entre la sensibilité et l'inertie. La variation temporelle du phénomène

à observer conditionne le type de capteur utilisé. L'inertie du capteur doit rester faible devant celle du phénomène.

- Maîtriser les interactions avec l'environnement. Il s'agit, dans ce cas, de la perturbation due au capteur, mais aussi des signaux parasites qu'il peut interpréter en tant que mesurande.
- Définir la gamme de température à observer. Par exemple, pour les mesures par thermocouples, cela revient à choisir le couple de matériaux ([19]).
- Positionner les domaines spatiaux et temporels de la mesure ainsi que les caractéristiques métrologiques souhaitées.
- Observer l'accessibilité de la zone de mesure ainsi que l'agressivité de l'environnement.

Ces conditions permettent de définir, au mieux, une instrumentation pour un problème donné. Notons que, la perturbation due au capteur, est un paramètre difficile à maîtriser dans la conception de l'expérimentation mais elle peut être déterminée analytiquement ([12]) ou numériquement ([8], [25], [43] ou [79]).

### 1.5.5 Quelques exemples de problèmes inverses liés au soudage

Dans la majorité des cas liés au soudage, le problème inverse est une estimation de paramètres. Plus précisément, il s'agit de déterminer les paramètres d'une source équivalente. Dans cette section, sont répertoriés les travaux de quelques auteurs en précisant les méthodes inverses utilisées.

- S. Bag et al. ([9]), ont appliqué cette méthode pour la détermination de certains paramètres relatifs au soudage laser.

Leur modélisation ne tenait compte que des aspects conductifs transitoires associés à la chaleur latente de fusion du métal. Ils ont supposé que le laser pouvait être représenté, au début, par une source surfacique puis par une source volumique dès que le liquide apparaît. Ils ont aussi montré que les aspects convectifs du bain fondu étaient représentables par une conductivité thermique "apparente" dans la partie liquide. Pour vérifier leurs hypothèses, ils ont cherché à estimer cette conductivité apparente et les coefficients d'absorption, dans le cas de l'application d'une source gaussienne surfacique et volumique. Pour ce faire, ils ont cherché à minimiser l'écart quadratique entre les largeurs et profondeurs, estimées et mesurées, du bain fondu.

- 
- Dans leur étude sur la détermination de la source apparente d'un soudage GTAW (TIG) et sur l'optimisation de la forme de bain fondu, C.V. Gonçalves et al. ([48]) ont utilisé deux types d'identifications paramétriques : l'Annihilation simulée et la Section d'or. Ils ont appliqué un modèle spécifique à chaque problème. Pour la recherche du paramètre

concernant la source, une résolution analytique a été réalisée, impliquant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices comme : un matériau supposé homogène et isotrope, un régime quasistationnaire 3D et l'absence de pertes en surface.

La détermination du rayon de bain fondu est réalisée par la mise en place d'un modèle plus complexe donc résolu numériquement en régime transitoire, avec propriétés thermophysiques dépendantes de la température et prise en compte de la chaleur latente de fusion. L'estimation est réalisée en minimisant les écarts de températures mesurées et calculées pour chaque pas de temps.

- 
- Dans une étude du procédé GMA (MIG-MAG), appliqué au cas d'un soudage en angle, A. Kumar et T. DebRoy ([72]), ont estimé la forme du bain fondu à travers l'identification de quatre paramètres selon trois méthodes : Levenberg-Marquardt, Fletcher-Reeves et Polak-Ribiere. Il est intéressant de présenter leur modélisation du problème. Leur modèle direct prend en compte l'apport de matière et donc la déformation de la surface du bain liquide. L'équation de la chaleur est alors réécrite dans un système de coordonnées curvilignes pour traiter la déformation, et ce, dans le repère de la source. Une formulation enthalpique est utilisée pour tenir compte de la chaleur latente.

La source de chaleur est décomposée en deux termes, une source Gaussienne surfacique dans laquelle ils estiment le rendement, et une source volumique, pour prendre en compte l'apport de chaleur provenant du métal d'apport. Dans cette dernière, représentant une moyenne temporelle de l'énergie réellement apportée, ils cherchent à déterminer l'emplacement d'application. Le dernier élément observé est un facteur multiplicateur associé à une conductivité thermique équivalente pour représenter artificiellement les mouvements convectifs dans la phase liquide. Leurs identifications paramétriques ont été réalisées en minimisant une fonction objectif dépendant de mesures et d'estimation de trois dimensions du bain fondu.

- 
- Dans sa thèse, D.D. Doan [31]) présente une étude stationnaire et une transitoire (cf. "retrait du volume liquide"). Dans chaque cas, il estime la position de la frontière liquide - solide apparaissant lors d'un soudage (pour plusieurs procédés). Pour l'étude stationnaire, il utilise l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour identifier la position de points de contrôles (courbes et surfaces de Bézier). Pour le régime transitoire, c'est une méthode du gradient conjugué qui est décrite et l'estimation ne porte plus sur des paramètres mais sur des fonctions. Dans chaque cas, les observables sont des températures localisées dans la partie solide.

- 
- J. Guo ([50], [51]) réalise aussi une estimation de paramètres et une estimation de fonctions. Appliquée au soudage par faisceau d'électrons, il recherche l'allure de la distribution d'énergie. Premièrement, les paramètres d'une fonction Gaussienne sont identifiés avec la

méthode de Levenberg-Marquardt et deuxièmement, la distribution spatio-temporelle est déterminée par régularisation itérative. Il montre la difficulté à représenter simultanément la zone fondue et la zone affectée thermiquement avec une source équivalente. Le problème inverse est validé en développant un cas purement théorique pour ensuite reproduire à un cas expérimental. La minimisation porte sur un critère quadratique construit sur les écarts de températures expérimentales et modélisées.

---

- S. Mishra et T. DebRoy ont réalisé une étude ([92]) assez peu commune dans le cadre du soudage. Compte tenu des temps de résolution des simulations multiphysiques, ils construisent une modélisation bien plus rapide en passant par un algorithme de “réseau de neurones”. Les entrées de cette représentation sont les paramètres procédés ( $U$ ,  $I$ , ...) et les propriétés du matériau (viscosité, ...). Les sorties sont les dimensions de la zone fondue (profondeur et hauteur).  
Finalement, ils valident leurs résultats en injectant les données précédentes dans une simulation multiphysique éprouvée et en comparant les formes de zones fondues expérimentale et numérique.
- 

D'autres auteurs ont travaillé sur l'estimation de terme source, notons par exemple V. A. Karkhine et al. [60] et [61], qui prennent en compte les transformations métallurgiques. Dans ces cas, les structures métallurgiques sont aussi qualifiées. On peut également citer les travaux de R. G. Keannini et B. Rubinski [63] qui utilisent les méthodes inverses pour estimer la forme du capillaire de vapeur créé par un arc.

Il est à noter que les analyses inverses appliquées au soudage font intervenir des problèmes directs particuliers, et ce, pour plusieurs raisons :

- la réalité montre de forts couplages physiques (cf. chapitre 2), ce qui nécessite des simplifications (source équivalente),
- le modèle est souvent non linéaire et donc résolu numériquement,
- les observables sont d'un ordre de grandeur relativement important (ici,  $T > 1500$  °C), une adimensionnalisation est donc recommandée,
- la fusion du matériau est source d'une discontinuité qui est illustrée par la condition de Stefan.

Ces difficultés se retrouvent également pour des études réalisées sur d'autres procédés, pour lesquels des méthodes inverses ont été utilisées. Pour exemple, citons le traitement laser des métaux [89], la trempe [77] ou encore la mise en forme de métaux pour l'industrie (bramage) [96].

## 1.6 Les problèmes inverses liés au changement de phase

### 1.6.1 Introduction

Sans entrer dans le détail, le phénomène de changement de phase est la transformation d'un matériau sous une forme d'équilibre à une autre forme d'équilibre dans lequel sa structure est différente. Lors de cette transition, une énergie est soit libérée, soit absorbée, il s'agit de la **chaleur latente**. Les causes de cette transformation peuvent être : une variation de température, une variation de pression ou une variation de volume. La notion de temps n'intervient qu'au second ordre, en "déclenchant" la transformation plus ou moins rapidement. Quatre transformations sont identifiables : **solide-solide**, **solide-liquide**, **liquide-vapeur** et **solide-vapeur**. Évidemment, elles sont réversibles mais présentent parfois des phénomènes d'hystérésis.

Dans le cadre de ce travail de thèse, seule l'anode est représentée. Rappelons aussi, que le matériau est un acier inoxydable austénitique. L'austénite est la phase solide du mélange fer-carbone, qui apparaît aux plus hautes températures. Le solide reste donc sous cette forme quelque soit la température, il n'y a donc pas changement de phase solide. De plus, les niveaux de puissance apportée sont suffisamment faibles pour ne pas engendrer l'apparition de la phase vapeur. Donc, seule la transition solide - liquide va être présentée plus en détail.

Dans ce cadre, trois échelles peuvent être distinguées, de la plus petite à la plus grande nous les nommerons : microscopique, mésoscopique et macroscopique.

- l'échelle microscopique concerne le cristal, la dendrite,
- l'échelle mésoscopique concerne le grain, un groupement de dendrites,
- l'échelle macroscopique concerne la frontière, les écoulements à proximité de la frontière.

Des travaux regroupent les trois niveaux de représentation. Nous citerons, par exemple, D. Sanyal et al. ([108]). Cependant, nous nous concentrons sur l'aspect macroscopique, nous ne développerons donc pas les deux autres dimensions.

### 1.6.2 La condition de Stefan

Un problème de Stefan est un problème faisant intervenir deux milieux (deux phases) séparés par une interface. Cette interface est le siège du changement de phase et donc de la libération ou de l'absorption d'une chaleur latente. Cette chaleur est nécessaire à la modification des liaisons interatomiques (intermoléculaires) existant pour un matériau dans un état donné. Par exemple, pour de la fusion, une énergie est nécessaire pour amener le matériau à la température de fusion (chaleur sensible) et une énergie supplémentaire (la chaleur latente) est utilisée pour "combattre" les fortes liaisons qui existent dans le solide.

Précisons que pour un matériau qui n'est pas pur, le changement de phase se produit sur un intervalle de température correspondant à un intervalle d'espace. Dans cette zone, le matériau est sous la forme d'un mélange des deux phases dont les proportions dépendent de la température et la chaleur latente est donc distribuée en fonction de ces proportions.

Dans la littérature, deux types de problèmes sont étudiés deux types d'analyse peuvent être observés : les études à deux phases et celles à une seule phase. Lorsque les deux phases sont traitées, la position du front est une résultante du problème. En revanche, lorsque seule une phase est représentée, cette position doit être connue a priori.

### Exemple d'un corps pur

La condition de Stefan décrit la discontinuité (pour un corps pur) due à la chaleur latente dans la conservation de l'énergie (1.39). Pour illustrer cette condition, définissons deux problèmes monodimensionnels, le premier à deux phases ( $X \in \Omega = [0, L] = \Omega_L \cup \Omega_S$ ) et le second à une seule phase (le solide). Dans les deux cas, la température de transition est notée  $T_{fus}$ .

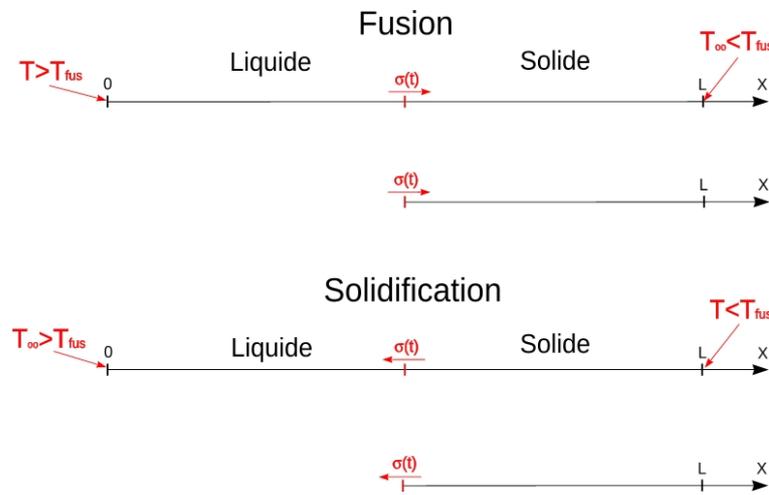


Figure 1.19 – Problème de Stefan dans le cas de la fusion ou de la solidification avec une ou deux phases

Où  $\sigma(t)$  est la position de l'interface à chaque instant sur l'axe  $X$ , pour laquelle la condition de Stefan impose :

$$T(X = \sigma(t), t) = T_{fus} \quad (1.38)$$

$$\rho L_{trans} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} \cdot \vec{n} = \lambda_L \frac{\partial T(\sigma^+(t))}{\partial n} - \lambda_S \frac{\partial T(\sigma^-(t))}{\partial n} \quad (1.39)$$

avec :  $L_{trans}$  la chaleur latente de transformation ( $>0$  pour la fusion et  $<0$  pour la solidification),  $\sigma^+(t) = \sigma(t) + \delta X$  et  $\sigma^-(t) = \sigma - \delta X$  les positions autour de la frontière.

Notons que, dans cette illustration (figure 1.19), les effets convectifs dans le liquide sont négligés. Aussi, les conditions aux limites sont ici de type Dirichlet, cependant des conditions de Neumann peuvent être prises en compte.

- Pour un problème à **deux phases**, les équations à résoudre sont les expressions (1.40) et (1.41) avec (1.39) sur la frontière mobile.

$$\rho_{Lcpl} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \lambda_L \frac{\partial T}{\partial X} \right) \quad \text{dans } \Omega_L \quad \forall X \in [0, \sigma(t)[ \quad (1.40)$$

$$\rho_{Scps} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \lambda_S \frac{\partial T}{\partial X} \right) \quad \text{dans } \Omega_S \quad \forall X \in ]\sigma(t), L] \quad (1.41)$$

- Pour un problème à **une phase**, seule l'équation 1.42 est considérée. En revanche, le flux provenant du liquide doit être imposé :  $\Phi_L$  sur la frontière “du côté” liquide (1.44).

$$\rho_{Scps} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \lambda_S \frac{\partial T}{\partial X} \right) \quad \text{dans } \Omega_S \quad \forall X \in ]\sigma(t), L] \quad (1.42)$$

La condition sur la frontière  $\sigma(t)$  devient :

$$T(X = \sigma(t), t) = T_{fus} \quad (1.43)$$

$$\rho_{Ltrans} \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} = \vec{\Phi}_L \cdot \vec{n} - \lambda_S \frac{\partial T(\sigma^-(t))}{\partial X} \quad (1.44)$$

Les conditions aux limites et initiales possibles peuvent être :

	Pour la fusion	Pour la solidification
Conditions initiales :	$T(X, t = 0) < T_{fus}$	$T(X, t = 0) > T_{fus}$
Conditions sur les limites	$\rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0} :$ $T(X = 0, t) > T_{fus}$	$\rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{L} :$ $T(X = L, t) < T_{fus}$
	$\rightarrow \mathbf{X} = \sigma(t) :$ Équations 1.38 et 1.39	

**Remarque 1** : Les problèmes à une phase évitent de réaliser des hypothèses dans le liquide comme le fait de négliger les effets advectifs. Cependant, le flux  $\vec{\Phi}_L$ , ne peut être connu a priori. Par conséquent, ce genre de problème est entaché de l'incertitude relative aux hypothèses effectuées sur ce flux.

**Remarque 2** : Précisons que dans cette thèse nous étudions un acier inoxydable. Ce matériau n'étant pas pur, le changement de phase a lieu dans l'intervalle  $[T_{solidus}, T_{liquidus}]$  dont les valeurs sont présentés par la suite.

### 1.6.3 Les méthodes de résolution

#### 1.6.3.1 La résolution analytique

La complexité du développement entraîne généralement la prise en compte d'importantes hypothèses (pas de convection, propriétés thermophysiques constantes, ...). Cependant, la justesse des résultats fait de ces résolutions simplifiées des cas de références, servant à valider des approches numériques ([26]) ou inverses ([37]).

#### 1.6.3.2 La résolution numérique

Pour résoudre les problèmes de changement de phase, il est possible d'utiliser une méthode à maillage fixe, qui est alors associée à une formulation Eulérienne. La position du front est, dans ce cas, déterminée après calcul en utilisant l'isotherme de fusion. La chaleur latente est alors prise en compte directement dans l'équation de la chaleur à l'aide d'une méthode enthalpique ou d'un  $c_p$  équivalent.

Une autre approche consiste à considérer deux domaines distincts associés à chaque phase, dont la frontière commune est le siège de la condition de Stefan. Cette frontière étant mobile, cette approche nécessite, par exemple l'emploi de méthodes à maillage mobile pour gérer le déplacement du front et la modification de la géométrie de chaque domaine.

Des méthodes telles que la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) permettent de traiter le déplacement des nœuds du maillage de manière arbitraire au sein du domaine et de manière Lagrangienne sur la frontière mobile.

#### 1.6.3.3 Les transformations

Une autre façon d'aborder le problème à frontière mobile est l'utilisation de transformations. Pour les plus communes, nous pourrions citer : la transformation de **Landau** et la transformation de **Duvaut** (Baïochi). La première est un changement de repère dans lequel le nouveau système d'axes devient une fonction de la position de l'interface. La seconde, mathématiquement plus complexe, amène à une formulation du problème sous forme d'une inéquation variationnelle ([31], [49],[44]). En effet, on observe deux raisons principales à cela. Premièrement, dans les deux cas, la transformation permet de se placer en maillage fixe, donc de simplifier la résolution numérique qui s'en suit. Deuxièmement, la seconde transformation affaiblit le système à résoudre.

### 1.6.4 Problèmes inverses de frontière mobile

La détermination de la position d'une frontière mobile au cours du temps est une notion particulièrement étudiée, soit de façon directe, soit de façon inverse. Des ouvrages comme ceux

de Gol'dman, donnent les clefs nécessaires à la construction de ce type de problème inverse [47].

Dans ce paragraphe, citons quelques travaux en relation avec l'estimation de front de fusion ou de solidification. Dans chaque cas est précisé, le type de problème (une phase ou deux phases), la transformation (régularisation) s'il en est, ainsi que les résultats obtenus :

- A. Afshari et al. [3], estiment l'évolution d'un front de fusion dans un repère normalisé monodimensionnel par la méthode de spécification de fonction (Beck). Ils cherchent à minimiser un critère quadratique construit sur l'écart de températures mesurées et simulées. Une régularisation par la méthode de pénalisation (Tichonov) est mise en place et ils valident leurs résultats avec une solution analytique (Neumann). Finalement, ils analysent l'effet du bruit de mesure sur l'estimation.

---

- A. El Badia et al. [37] présentent des travaux d'identification de front de fusion sur un problème à une phase. Ils minimisent aussi un critère quadratique de température régularisé par la méthode de Tikhonov. L'algorithme d'optimisation utilisé est la méthode de "quasi-Newton" et ils comparent leurs estimations à une solution analytique. Dans ce cas, le problème de Stefan est laissé sous son expression la plus simple et seule la température est imposée sur la frontière mobile. Ils comparent la méthode qu'ils utilisent (résolution d'un problème adjoint) avec celle utilisée par A. Afshari et al. [3] (séquentielle) et obtiennent de meilleurs résultats avec leur méthode.

---

- R. G. Keanini et N. N. Desai [62] font une étude inverse pour un cas de soudage débouchant en trois étapes. Dans un repère à trois dimensions et en quasistationnaire, ils considèrent un problème de Stefan à une phase (solide) et estiment, tout d'abord le flux sur l'interface connaissant la forme de la frontière mobile, la forme de la frontière sur un plan intermédiaire aux faces supérieure et inférieure et enfin, la forme complète de la zone fondue (trois plans, figure 1.20). La méthode utilisée pour résoudre le problème inverse est l'algorithme du gradient conjugué avec une régularisation par la méthode de pénalisation (Tikhonov).

---

- B. Protas et al. [102] estiment un flux de chaleur afin de retrouver une forme de frontière mobile mesurée. Le problème est supposé assimilable à un problème de Stefan 1D à une phase et à deux frontières mobiles. La méthode inverse utilisée est une méthode de descente dans laquelle le gradient de la fonctionnelle résiduelle est obtenu soit dans une géométrie fixe soit dans une géométrie mobile. Ils confirment l'idée que le problème adjoint est plus facile à écrire dans le système classique. Cependant, pour des formes de frontière mobile complexes, la formulation dans la géométrie fixe est plus avantageuse. Le changement de variable qu'ils mettent en place est assez proche de celle de Landau :  $x = \frac{L(t)}{2}\xi + x_0(t)$  avec  $\xi$  le nouvel axe,  $x_0(t)$  le centre de la géométrie et  $L$  la longueur de la géométrie.

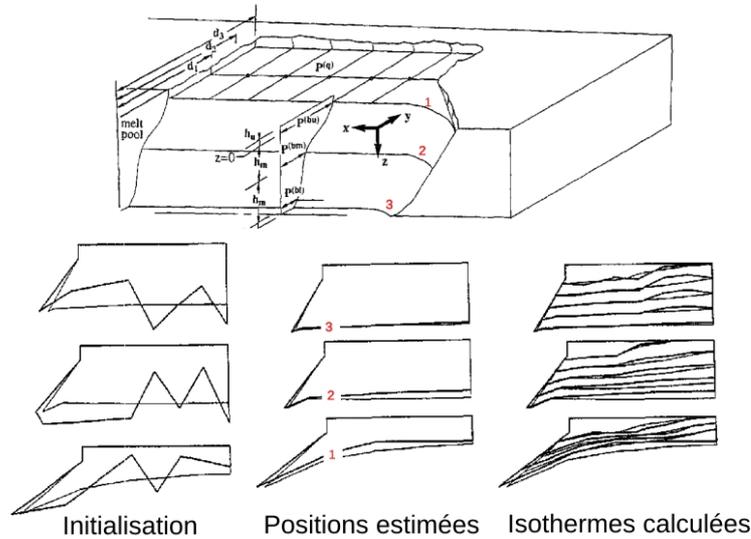


Figure 1.20 – Résultats obtenus par R. G. Keanini et N. N. Desai [62]

- N. Zabararas et al. [129] traitent un problème de Stefan inverse dans lequel, un flux surfacique est estimé pour une évolution de l'interface liquide-solide souhaitée. Dans ses travaux, il montre l'influence respective de deux types de régularisation. Une régularisation de type Tikhonov, dont l'effet s'observe plutôt sur la stabilité des distributions spatiales des flux et une régularisation temporelle par spécification de fonctions qui tend à stabiliser la distribution temporelle.

De manière générale, et donc dans l'ensemble des travaux cités précédemment, un problème inverse nécessite la prise en compte d'un observable mesuré. Lorsqu'il s'agit d'un problème de transferts thermiques, l'observable est généralement la température sur certains points. Néanmoins, cela peut être un flux (surfacique ou volumique) ou une géométrie. De plus, compte tenu des effets d'un potentiel bruit de mesure ou d'une perturbation, sur la qualité de l'estimation, cette notion ne doit pas être négligée.

## 1.7 Conclusion du chapitre 1

Pour conclure ce chapitre, rappelons les différents thèmes présentés. Pour commencer, nous avons introduit le procédé de soudage TIG qui fait l'objet de cette thèse. Un état de l'art portant sur la modélisation de ce procédé et des phénomènes physiques mis en jeu dans l'arc et l'anode a été réalisé. Les modèles les plus complets se restreignant néanmoins à des configurations bi-dimensionnelles axisymétriques pour représenter les phénomènes au sein de l'arc et de l'anode. Les diverses difficultés liées à cette approche multiphysique nous ont conduit à envisager également l'utilisation de méthodes inverses pour déterminer les champs de température dans la phase solide. Ainsi, après une brève présentation des méthodes inverses, l'état de l'art s'est porté sur

la présentation de cas d'estimation dans le cadre du soudage. L'approche classique des "sources équivalentes" a aussi été exposée, suivit de l'approche, beaucoup moins appliquée au soudage, consistant à identifier la position du front de fusion. De ce fait, les problèmes de Stefan sont introduits et quelques applications de problèmes inverses qui leur sont dédiées sont présentées.

Cette étude bibliographique a orienté nos choix quant aux méthodes à appliquer afin de mener à bien notre étude. En effet, nous avons observé qu'une étude numérique complète (unifiée) du procédé de soudage TIG ne permet pas forcément l'obtention de résultats satisfaisants en terme de position d'interface liquide - solide et de champ thermique. De même, les études trop simplifiées (source équivalente) nécessitent le développement d'un problème inverse et manquent parfois de représentativité physique. Aussi nous faisons le choix de traiter deux types de méthodes. La première est de type multiphysique mais ne s'intéresse qu'à la partie anode du procédé nécessitant des précautions sur la définition des conditions aux limites en surface de zone fondue. La seconde vise à ne traiter que les phénomènes de transfert dans la phase solide à la manière d'un problème de Stefan à une phase. Cette dernière implique la mise en œuvre et la résolution d'un problème inverse d'estimation de fonction (position de l'interface liquide - solide).

Le problème inverse est construit compte tenu des résultats des travaux présents dans la littérature. Nous avons observé que la méthode de régularisation itérative (gradient conjugué) est particulièrement propice à l'estimation de fonction. En revanche, cela implique de faire l'hypothèse que la réduction du critère quadratique peut se faire sans autre type de régularisation telles que la pénalisation ou la spécification de fonction.

Le choix de ne traiter que la partie solide de la pièce à souder implique de considérer le problème de changement de phase plutôt comme un problème d'estimation de forme (l'isotherme de fusion) à la manière de C.H. Huang [57].

# Chapitre 2

## MODÉLISATION DU BAIN FONDU

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>51</b>
<b>2.2</b>	<b>Hypothèses principales</b>	<b>53</b>
<b>2.3</b>	<b>Géométrie</b>	<b>55</b>
<b>2.4</b>	<b>Formulation mathématique du modèle multiphysique</b>	<b>56</b>
2.4.1	Équations de conservation	56
2.4.2	Conditions aux limites	60
<b>2.5</b>	<b>L'acier inoxydable austénitique AISI 316L(N)</b>	<b>64</b>
2.5.1	Présentation	64
2.5.2	Propriétés thermophysiques	65
<b>2.6</b>	<b>Maillage et paramètres de résolution</b>	<b>69</b>
2.6.1	Introduction	69
2.6.2	Maillages et paramètres de la simulation test	70
2.6.3	Résultats	71
<b>2.7</b>	<b>Distribution de la chaleur latente et condition de Darcy</b>	<b>74</b>
2.7.1	Distribution de la chaleur latente	75
2.7.2	Paramètres de la loi de Darcy	76
<b>2.8</b>	<b>Validation bibliographique</b>	<b>78</b>
2.8.1	Description du modèle	78
2.8.2	Températures et taille de bain	79
<b>2.9</b>	<b>Plan d'expériences numériques</b>	<b>80</b>
2.9.1	Choix du plan et des facteurs	80
2.9.2	Modèles mathématiques et description de la méthode	81
2.9.3	Analyse des effets	83
2.9.4	Bilan	84
<b>2.10</b>	<b>Influence des phénomènes physiques</b>	<b>86</b>
<b>2.11</b>	<b>Conclusion du chapitre 2</b>	<b>88</b>

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, est mise en œuvre une simulation multiphysique de la partie anode d'un procédé de soudage TIG statique. Il s'agit donc de représenter la fusion locale d'un disque d'acier

soumis à un arc électrique statique.

Cette étude consiste à établir une modélisation prenant en compte les phénomènes les plus influents sur l'évolution de la zone fondue et sur le champ thermique, mais sans être une représentation complète du procédé (anode - arc plasma - cathode). Par conséquent, la littérature est utilisée pour connaître les informations manquantes, mais indispensables à la construction du modèle, comme la distribution de l'apport d'énergie sur la surface de la pièce.

Nous présenterons tout d'abord, les hypothèses émises dans cette étude. La géométrie mise en œuvre numériquement est ensuite introduite compte tenu des hypothèses retenues et des dimensions réelles de la pièce. Une description mathématique des phénomènes physiques modélisés est donc introduite.

Un effort particulier est porté sur le choix des propriétés thermophysiques utilisées au cours de la simulation. Pour cela, une synthèse bibliographique est réalisée et analysée de façon à retenir les choix les plus pertinents.

Le maillage et les paramètres de résolution sont ensuite présentés et la sensibilité des résultats d'une simulation, à différents paramètres du modèle est étudiée.

La construction du modèle est alors validée par comparaison à des données issues de la littérature.

Afin d'appréhender l'influence de certains paramètres physiques difficilement accessibles par la mesure, un plan d'expériences numériques est mis en place.

Pour finir, une étude comparative est menée afin d'étudier l'effet de la prise en compte ou non de certains phénomènes physiques tels que la déformation de la surface libre ou les forces de Lorentz.

Les simulations sont effectuées à l'aide du logiciel commercial COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> (version 3.5a). Il s'agit d'un logiciel de résolution numérique d'équations différentielles par la méthode des éléments finis. Il met à disposition des utilisateurs un certain nombre d'équations relatives à des problèmes physiques mais il permet aussi l'utilisation d'équations de formes générales. De plus, l'implémentation des équations sous leur forme faible peut être réalisée.

Le matériel informatique, utilisé dans le cadre de cette thèse, est une station de calcul DELL PRECISION T5400 composée de :

- 2 processeurs X5470 (4 cœurs chacun) - 3,33GHz
- 32 Go de mémoire vive (RAM) - 667MHz

## 2.2 Hypothèses principales

Les principales hypothèses retenues pour ce modèle multiphysique sont présentées dans ce qui suit et seront discutées au cours de ce chapitre.

S'agissant des limites de la modélisation, seule l'anode (la pièce) est représentée. Cette simplification, très fréquente dans la littérature (chapitre 1) permet de s'affranchir de la physique très complexe présente au sein du plasma. Il est cependant nécessaire de rendre compte de l'ensemble des phénomènes intervenant sur la surface de la zone fondue comme l'apport de chaleur, la densité de courant, la pression de l'arc ou encore les forces de cisaillement.

En ce qui concerne la géométrie, le cas bi-dimensionnel axisymétrique est retenu. Cela revient à supposer que les phénomènes physiques présentent une symétrie axiale dans un repère cylindrique. Cette hypothèse est directement liée au caractère statique de l'arc. Cette configuration est couramment choisie pour, justement, réduire la dimension du problème. Citons, par exemple, les travaux de L. Depradeux [29] et de M. Brochard [21] dont les études se rapportent également au procédé de soudage TIG appliqué sur un acier inoxydable.

Dans les hypothèses présentées par la suite, certaines sont justifiées par les travaux de la littérature, d'autres sont validées dans la suite de l'étude.

### La conservation de l'énergie

Les hypothèses sont les suivantes :

- La source de chaleur est supposée uniquement présente en surface de la zone fondue et distribuée selon une loi Gaussienne. L'aspect surfacique de la source s'explique par les modes de transfert d'énergie sur l'interface plasma - liquide : la conduction du plasma vers l'anode et l'énergie due à l'absorption des électrons ([21] [118]).
- L'énergie apportée de façon volumique au sein de l'anode par effet Joule est supposée négligeable.
- L'équation de la chaleur étant résolue en température, la chaleur latente de fusion est prise en compte par l'intermédiaire du terme d'accumulation et plus particulièrement à travers une chaleur massique à pression constante "équivalente". Cette méthode est très classiquement utilisée pour traiter les problèmes de soudage ([115] [75] [16]).
- Puisque que l'alliage considéré dans cette étude est très répandu, ses propriétés thermophysiques sont issues de la littérature.

La conservation de la masse et de la quantité de mouvement

Les hypothèses retenues sont :

- La conservation de la quantité de mouvement est écrite en supposant un fluide Newtonien, incompressible et un écoulement laminaire. Ces hypothèses sont très courantes dans ce type d'analyse. Par exemple, et pour ne citer qu'eux, les travaux de I.S. Kim et al. ([66]) dont la forme de zone fondue est similaire à celle de notre étude ou ceux de S. Mishra et al. ([93]) qui traitent aussi un acier inoxydable, présentent tous deux des résultats très satisfaisants comparés aux observations expérimentales.
- Les approximations de Boussinesq sont retenues, à savoir, la masse volumique est supposée constante dans les équations de conservation sauf dans le terme de flottabilité dans lequel elle varie linéairement avec la température.
- Le soufre présent dans l'acier 316L est un élément tensio-actif qui, par l'effet Marangoni, entraîne des écoulements surfaciques non négligeables. D.K. Aidun et al. ([4]) abordent ce phénomène de thermocapillarité et illustrent expérimentalement son effet. S. Mishra et al. ([93]) le traitent de façon expérimentale et numérique, en tenant compte à la fois de la variation de tension superficielle par rapport à la température et de sa variation par rapport à la concentration de soufre. Cette dernière est calculée à l'aide d'une équation de diffusion. Leur modèle prend également en compte, outre les forces de Lorentz et de flottabilité, la convection due aux gradients de concentration en soufre (dépendance de la masse volumique à la concentration en soluté). Ils montrent que même dans le cas du soudage de deux aciers de concentrations initiales en soufre différentes, la distribution de concentration au sein du bain ainsi qu'en surface, est très vite uniforme. Ces effets ne sont donc pas pris en compte dans notre modèle. Par contre, la variation de tension superficielle avec la température est traitée à l'aide de la relation proposée par P. Sahoo et al. [107], en supposant que l'acier 316L se comporte comme un mélange binaire Fer - Soufre.
- Les écoulements dans la zone de transition liquide – solide (la zone pâteuse) se font suivant une loi de Darcy, loi qui est présentée dans le chapitre 1 et qui est parfois justifiée de façon uniquement numérique ([21]) ou de façon physique en reliant cette condition aux longueurs dendritiques ([20][122]).
- La force de cisaillement, présente à la surface du métal liquide et générée par l'écoulement du plasma est négligée, compte tenu de sa faible amplitude ([88]).

Les équations de Maxwell

- Comme pour l'apport de chaleur, la densité de courant est supposée être apportée de façon surfacique et distribuée selon une distribution Gaussienne.

- Le problème à résoudre est formulé en induction magnétique afin de permettre une résolution couplée de l'ensemble des équations du modèle.
- Les propriétés électromagnétiques du matériau sont supposées constantes, bien que la dépendance de la conductivité électrique de l'acier par rapport à la température soit disponible dans la littérature ([124]). Ce paramètre n'intervient en réalité qu'au second ordre dans la modélisation et nous préférons éviter la non-linéarité supplémentaire que la dépendance à la température implique.

### La déformation de la frontière libre

Pour finir, la dernière hypothèse porte sur la déformation de la surface libre. Celle-ci est supposée être engendrée par une pression d'arc dont la distribution est liée à celle du courant électrique. Plus de détails sont apportés sur cette hypothèse lors de la description de ce problème.

## 2.3 Géométrie

L'échantillon utilisé au cours de l'étude expérimentale (chapitre 4) est un disque d'acier de  $160\text{ mm}$  de diamètre et de  $10\text{ mm}$  d'épaisseur. Sur ce disque, plusieurs tirs statiques sont effectués suffisamment éloignés les uns des autres pour assurer l'axisymétrie de chaque bain de fusion. Ainsi la géométrie est réduite à un disque de  $80\text{ mm}$  de diamètre et de  $10\text{ mm}$  d'épaisseur (figure 2.1).

Davantage d'informations sur la forme de l'échantillon sont présentées dans le chapitre 4, dans lequel est présentée l'étude expérimentale.

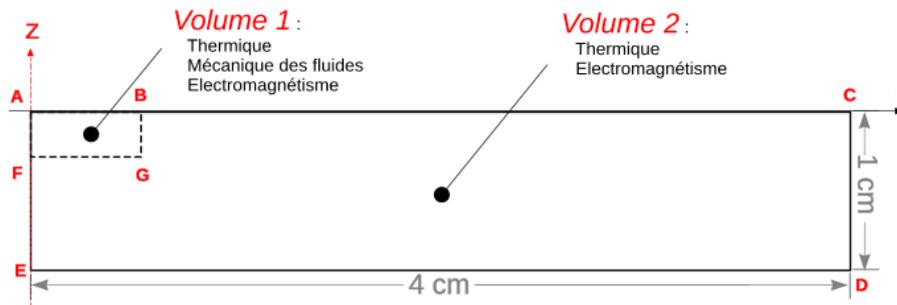


Figure 2.1 – Géométrie du modèle multiphysique 2D axisymétrique

Sur la figure 2.1, deux domaines sont identifiés. Le premier : le "Volume 1", dans lequel se développe la zone fondue, et le "Volume 2" qui reste entièrement solide. Comme indiqué sur le schéma, la mécanique des fluides n'est résolue que dans le Volume 1, afin de réduire le nombre total de degrés de liberté du problème.

## 2.4 Formulation mathématique du modèle multiphysique

### 2.4.1 Équations de conservation

#### 2.4.1.1 Problème de transferts thermiques

Le domaine simulé est le siège de différents modes de transferts thermiques. Différencions les transferts purement conductifs des transferts conducto-convectifs. Les premiers sont localisés dans la partie solide, alors que les seconds sont présents dans la partie liquide. Dans les deux cas, il s'agit du principe de conservation de l'énergie qui s'écrit dans un repère axisymétrique :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

Avec le vecteur vitesse :  $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

L'annulation de la vitesse  $\vec{V}$  dans le solide entraîne la suppression du terme d'advection de la relation (2.1).

#### 2.4.1.2 Problème de mécanique des fluides

Compte tenu des hypothèses précédentes, les équations de conservation de la masse (2.2) et de la quantité de mouvement (2.3), s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_L \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( -p \mathbf{I} + \mu_L(T) (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T) \right) + \vec{f}_v \quad (2.3)$$

Dans cette dernière équation, le terme  $\vec{f}_v$  se décompose en deux composantes :  $f_r$  et  $f_z$ , respectivement sur les axes  $r$  et  $z$  :

$$f_r = -j_z B_\theta + \frac{\mu_{L,moy}}{K} u \quad (2.4)$$

$$f_z = j_r B_\theta + \rho_L (\beta(T - T_{fus}) - 1) g + \frac{\mu_{L,moy}}{K} v \quad (2.5)$$

Les premiers termes de ces deux équations sont les composantes de la force de Lorentz, les derniers sont les termes d'extinction (condition de Darcy) présentés dans le chapitre 1 par les relations 1.16 à 1.19.  $\mu_{L,moy}$  est une valeur moyenne de la viscosité dynamique. Le terme uniquement présent selon l'axe  $z$  correspond à l'approximation de Boussinesq.

### 2.4.1.3 Problème Électromagnétique

Dans cette étude, le problème électromagnétique est formulé en induction magnétique. Afin de présenter cette formulation, commençons par rappeler les équations de Maxwell qui peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$\text{Équation de Maxwell-Ampère :} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday :} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\text{Équation de conservation du flux magnétique :} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss :} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

Avec :

$\vec{H}$  le champ magnétique et  $\vec{B}$  son induction,

$\vec{E}$  le champ électrique et  $\vec{D}$  son induction,

$\vec{j}$  la densité de courant et  $\phi$  le potentiel électrique.

$\rho$  la densité volumique de charge.

Il existe également la relation décrivant la conservation de la densité de courant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.11)$$

Ainsi que,

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.12)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.13)$$

où  $\epsilon$  est la permittivité diélectrique du matériau et  $\mu$  sa perméabilité magnétique.

Par ailleurs, la loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma_{EM} \vec{E} + (\sigma_{EM} \vec{u} \wedge \vec{B}) \quad (2.14)$$

Le second terme est, dans le cas présent, négligé en raison du très faible nombre de Reynolds magnétique qui exprime le rapport entre les termes de convection et de diffusion. Il se définit par la relation :

$$Re_{mag} = \mu_0 \sigma_{EM} l u \quad (2.15)$$

avec  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  la perméabilité magnétique du vide,  $\sigma_{EM} \simeq 10^6 \text{ S.m}^{-1}$  la con-

ductivité électrique de l'acier,  $l \simeq 0,0015 \text{ m}$  la longueur caractéristique de passage du courant et  $u \simeq 0,5 \text{ m.s}^{-1}$  la vitesse maximale rencontrée dans le métal liquide. Est obtenu, ainsi, un nombre de Reynolds magnétique de l'ordre de  $1.10^{-3}$ , ce qui montre que l'effet diffusif est largement prédominant.

### Formulation en induction

En partant de l'équation de Maxwell-Ampère et en l'associant à la relation (2.12), il vient :

$$\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.16)$$

En appliquant la loi d'Ohm et la relation 2.13, est obtenu :

$$\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu} = \sigma_{EM} \vec{E} + \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t} \quad (2.17)$$

En effectuant le rotationnel de l'expression précédente, on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu} \right) = \sigma_{EM} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \epsilon \frac{\partial(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{\partial t} \quad (2.18)$$

Et sachant que :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} \quad (2.19)$$

En combinant les relations (2.18) et (2.19) et en introduisant la relation de Maxwell-Faraday :

$$-\frac{\Delta \vec{B}}{\mu} = \sigma_{EM} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

On peut, par ailleurs, introduire les composantes des vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{j}$  en coordonnées cylindriques :  $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix}$  et  $\vec{j} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix}$

L'hypothèse d'axisymétrie amène à considérer  $j_\theta$  nul. Donc, dans le repère bi-dimensionnel, il ne subsiste que la composante de l'induction magnétique selon l'angle  $\theta$  en fonction des densités de courant selon les axes  $r$  et  $z$ . Soit,

$$-\Delta B_\theta + \frac{B_\theta}{r^2} = -\mu \sigma_{EM} \frac{\partial B_\theta}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

Notons que dans le cas particulier de cette étude, la source du problème électromagnétique est supposée indépendante du temps. En effet, le courant apporté par le procédé est constant et la phase d'établissement du courant est négligée compte tenu de sa faible durée ( $< 0,1 \text{ s}$ ). Le problème peut donc être résolu en régime statique.

L'équation de Maxwell-Ampère (2.22), connaissant la relation (2.12) liant l'induction au champ magnétique, se simplifie donc en :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (2.22)$$

Soit,

$$j_r = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \quad (2.23)$$

$$j_z = \frac{1}{r\mu} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \quad (2.24)$$

Ainsi, en ayant préalablement résolu (2.21), les composantes du vecteur densité de courant (2.23 et 2.24) peuvent être calculées.

La formulation générale de la force de Lorentz dans un conducteur (2.25) peut donc être exprimée dans un repère 2D axisymétrique selon :

$$\vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (2.25)$$

$$\vec{F}_{Lorentz} \quad \begin{cases} F_r = -j_z B_\theta \\ F_z = j_r B_\theta \end{cases}$$

### Remarque

L'équation (2.21) n'étant pas directement proposée par le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>, l'équation générique "coefficient form" est utilisée. Cette dernière est par défaut formulée dans un repère cartésien. Des modifications sont donc à apporter pour permettre une résolution dans un domaine axisymétrique.

#### 2.4.1.4 Déplacement de l'interface plasma - anode

Le déplacement de la surface libre du bain liquide est géré par la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) que propose COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>. Cette méthode consiste à traiter le déplacement de la frontière mobile de façon Lagrangienne tout en résolvant le champ de vitesse dans le volume de façon Eulérienne. Le déplacement des nœuds présents dans le volume est effectué de manière à optimiser la qualité du maillage. Précisons que dans la version 3.5a du logiciel utilisé, deux méthodes de gestion de ce déplacement sont disponibles : "Laplace" ou "Winslow". La dernière étant plus efficace pour les forts déplacements, c'est donc celle-ci que nous utilisons [94].

À noter que la méthode ALE, depuis ses premières applications dans les années 70 [54] a largement été utilisée dans de nombreux domaines comme par exemple dans le cadre du laminage [101] ou du soudage [103].

## 2.4.2 Conditions aux limites

### 2.4.2.1 Conditions aux limites du problème thermique

- Sur les segments [AB] et [BC] (figure 2.1) :

L'apport d'énergie sur cette frontière est issu de l'arc. Les phénomènes présents au sein de l'arc n'étant pas modélisés dans cette étude, la chaleur apportée est donc déduite de la littérature. Citons les travaux expérimentaux de N. S. Tsai et T. W. Eagar [118], qui, bien que relativement anciens restent d'actualité dans la définition de l'apport de chaleur.

Leurs travaux montrent que la distribution d'énergie selon le rayon est de type Gaussien, soit :

$$q_0(r) = q_m e^{-\frac{r^2}{2r_{th}^2}} \quad (2.26)$$

avec :  $r_{th}$  l'écart-type de la fonction gaussienne et  $q_m$  la densité maximale de flux de chaleur sur la surface.

La densité  $q_m$  peut s'exprimer en fonction de  $r_{th}$  ainsi que des paramètres du procédé : la tension  $U$ , le courant  $I$  et le rendement  $\eta$ .

$$q_m = \frac{\eta UI}{2\pi r_{th}^2}$$

À cet apport, viennent s'ajouter deux termes :  $q_{cv}$  (2.27) et  $q_{rt}$  (2.28) représentant respectivement, les pertes par convection et par rayonnement :

$$q_{cv} = h_{cv}(T - T_\infty) \quad (2.27)$$

$$q_{ray} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_{p,\infty}^4) \quad (2.28)$$

avec :  $h_{cv}$  le coefficient d'échange par convection,  $\varepsilon$  l'émissivité du matériau,  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann,  $T_\infty$  la température du milieu ambiant et  $T_{p,\infty}$  la température des parois "vues" par les frontières.

- Sur les segments [CD] et [DE] :

Ces frontières sont supposées être en contact avec l'air et subissent donc des pertes convectives (2.27) et radiatives (2.28).

Cette frontière fait apparaître les limites de l'hypothèse d'axisymétrie. En effet, nous avons réduit le domaine simulé à un disque de 80 mm de diamètre centré sur le bain de fusion. Or, dans le cadre expérimental (chapitre 4), les tirs ne sont pas centrés sur l'échantillon d'acier donc la zone d'étude peut être bordée soit par l'air, soit par le métal. Cependant, cette zone est suffisamment grande pour éviter l'influence de cette condition sur la période d'analyse. Une condition d'isolation thermique aurait très bien pu être appliquée car la

température reste égale à celle de l'ambiance durant la durée des essais, comme le montreront nos résultats en température présentés dans le chapitre 5.

- Sur les segments [EF] et [FA] :

Situées sur l'axe de symétrie, ces limites sont définies comme tel. Cette condition d'axi-symétrie revient à l'expression (2.29) :

$$q_{sim} = 0 \quad (2.29)$$

### 2.4.2.2 Conditions aux limites du problème de mécanique des fluides

Comme il a été présenté précédemment, seules les frontières du Volume 1 (figure 2.1) sont à prendre en compte.

- Sur la frontière [AB] :

Les écoulements sur cette surface sont conditionnés par l'effet Marangoni. Les variations de concentration de soufre à la surface du bain étant négligées ici, la contrainte tangentielle à imposer se limite à :

$$\sigma_\tau = -\mu \frac{\partial V_\tau}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.30)$$

La définition de la variation de la tension de surface en fonction de la température sera donnée par les relations (2.42) et (2.43) plus loin dans le paragraphe 2.5.2.

Dans le cas où la déformation de la surface libre est prise en compte, la contrainte normale appliquée sur la frontière est déterminée à partir de la tension de surface  $\gamma$ , de la courbure  $\kappa$  et de la pression d'arc, compte tenu de nos hypothèses :

$$\sigma_n = \gamma \kappa + P_{arc} \quad (2.31)$$

$$P_{arc} = P_{max} e^{-\frac{r^2}{2r_{elec}^2}} \quad (2.32)$$

La pression  $P_{max}$  est la pression de l'arc observée sur l'axe de symétrie dont la valeur est extraite de la littérature est précisée dans le tableau récapitulatif de l'annexe B. Notons que dans l'expression 2.32, le rayon de la distribution est le même que celui utilisé pour la distribution de la densité de courant (hypothèse présentée dans le chapitre 1).

Ces conditions aux limites sont implémentées dans le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> à l'aide d'une contrainte faible appliquée sur la surface libre. L'utilisation de la formulation faible associée à la méthode des éléments finis permet de remplacer le calcul de courbure par celui du gradient tangentiel. Ce dernier fait partie des grandeurs facilement accessibles dans le logiciel. Pour plus de précisions sur l'implémentation de ce problème ALE avec tension de surface, nous pourrions nous référer à [23].

- Sur les frontières [BG] et [GF] :

Ces frontières sont contenues dans la phase solide. À l'intérieur de ce domaine, la condition de Darcy permet d'instaurer un champ de vitesse nul en dehors du bain de fusion. Une condition de vitesse nulle dite de non-glissement, est donc mise en place pour ces deux frontières.

$$\vec{V} = \vec{0} \quad (2.33)$$

- Sur la frontière [FA] :

La frontière étant positionnée le long de l'axe de symétrie, seule la composante normale de la vitesse est annulée, il s'agit d'une condition de glissement.

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.34)$$

### 2.4.2.3 Conditions aux limites du problème électromagnétique

- Sur les segments [AB] et [BC] : Comme dans le problème thermique, cette frontière supporte l'apport d'énergie. Dans ce cas, il s'agit d'une densité de courant surfacique qui est imposée. Sa distribution est définie d'après les données de la littérature [118]. Notons que dans cette référence, il est montré la dépendance de l'allure de la distribution de densité de flux thermique (2.26) à la distribution de la densité de courant (2.35).

$$j_z(r) = j_0 e^{-\frac{r^2}{2r_{elec}^2}} \quad (2.35)$$

avec :

$$j_0 = \frac{I}{2\pi r_{elec}^2} \quad (2.36)$$

où  $I$  représente l'intensité du courant de l'arc et  $r_{elec}$  l'écart-type de la fonction Gaussienne. Soit, en induction magnétique :

$$j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \rightarrow B_\theta + r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} = r\mu j_0 e^{-\frac{r^2}{2r_{elec}^2}} \quad (2.37)$$

- Sur le segment [CD] : Lors des essais expérimentaux, cette frontière est reliée à la masse du circuit électrique. Par conséquent, les lignes de courant sortent par cette limite et sont perpendiculaires au segment [CD]. Cela se traduit par l'annulation de la composante tangentielle du vecteur densité de courant. Soit :

$$j_z = 0 \quad \longrightarrow \quad B_\theta + r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} = 0 \quad (2.38)$$

- Sur le segment [DE] : Sur cette limite, la pièce est en contact avec l'air ambiant. Elle est donc isolée électriquement.

$$j_z = 0 \quad \longrightarrow \quad B_\theta + r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} = 0 \quad (2.39)$$

- Sur le segment [EF] et [FA] : Il s'agit de l'axe de symétrie, c'est donc la composante nor-

male de la densité de courant qui est nulle :

$$j_r = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0 \quad (2.40)$$

Il est à noter que dans la littérature ([115] ou [104]), la condition appliquée sur la frontière de symétrie est :  $B_\theta = 0$ . Nous vérifions donc numériquement, qu'en appliquant (2.40), l'annulation de  $B_\theta$  soit bien obtenue.

### 2.4.2.4 Conditions aux limites du problème de frontière mobile

De la même manière que pour le problème de mécanique des fluides, la gestion du déplacement du maillage n'est effectuée que dans le Volume 1.

– Sur la frontière [AB] :

Sur cette frontière, la vitesse de déplacement est imposée et elle résulte de la résolution du problème de mécanique des fluides :

$$v_{front} = \vec{V} \cdot \vec{n} \quad (2.41)$$

– Sur les frontières [BG] et [GF] :

Ces frontières n'étant pas soumises à un écoulement, elles sont maintenues fixes dans toutes les directions.

– Sur la frontière [FA] :

La frontière étant positionnée le long de l'axe de symétrie, seul le déplacement selon l'axe  $z$  est autorisé. Celui-ci est conditionné par celui de la frontière [AB] (déplacement libre).

### 2.4.2.5 Valeurs conservées pour les paramètres du modèle

Dans les précédentes descriptions des conditions aux limites, certains paramètres sont propres au procédé (la tension ou le courant). En revanche, des paramètres tels que les rayons de distribution des sources ou le rendement ne sont pas accessibles directement au cours de l'expérience. Ces valeurs ont donc été estimées à partir des données disponibles dans la littérature.

Dans le tableau 2.1, sont regroupés l'ensemble des paramètres. Les informations disponibles dans la littérature ne correspondent pas exactement à nos conditions expérimentales, en terme de hauteur d'arc par exemple, des approximations par interpolation ont été effectuées. Les articles cités ici fournissent les distributions des sources Gaussiennes en fonction des paramètres opératoires. Dans notre étude, les choix sont effectués par rapport au courant (150 A), la tension (10 V), le diamètre de l'électrode (2,4 mm), l'angle d'affûtage de l'électrode (45°), la hauteur d'arc ( $\approx 1,2$  mm), le type et le débit du gaz de protection (Arcal 1 à 16 l.min<sup>-1</sup>) et le diamètre du méplat en pointe d'électrode ( $> 200$  μm).

Paramètres opératoires	Valeurs	
Tension (V)	10	
Courant (A)	150	
Paramètres modèle	Valeurs	Références
Rayon de la source thermique $r_{th}$ (m)	<b>0,002</b>	[118]
Rayon de la source électrique $r_{elec}$ (m)	<b>0,0017</b>	[118]
Rayon de la distribution de pression $r_{pres}$ (m)	<b>0,0017</b>	[84]
Pression maximale de l'arc $P_{max}$ ( $N \cdot m^{-2}$ )	<b>900</b>	[38] et [39]
Rendement thermique du procédé $\eta$	<b>0,65</b>	[16](0,63) et [115](0,68)

Tableau 2.1 – Choix des paramètres du modèle

## 2.5 L'acier inoxydable austénitique AISI 316L(N)

### 2.5.1 Présentation

Le matériau étudié est un acier **AISI 316L(N)**, faiblement concentré en carbone (L) et en soufre (N). Dénommé **X2CrNiMo17-12-2** (Tableau 2.2) selon la norme française, cet acier est dit inoxydable. En effet, l'aspect inoxydable vient de la forte concentration en chrome ( $Cr > 10,5\%$ ) qui permet d'obtenir une excellente résistance à la corrosion. L'ajout de molybdène augmente cette résistance dans presque tous les milieux.

L'austénite existe pour des métaux alliés à base de fer tels les aciers. Le carbone a, entre autre, la particularité de favoriser l'existence de la phase  $\gamma$ . Cependant, cette phase n'est présente qu'à des températures élevées et le matériau peut devenir ferritique durant le refroidissement. Pour augmenter la plage de température de présence de l'austénite, du nickel est ajouté dans des proportions supérieures à 6%. De plus, le manganèse permet d'obtenir une solution solide stable de l'austénite à température ambiante.

Éléments	C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Mo
Imposé coulée (min)		1,6				17	12	2,3
(Max)	0,03	2	0,5	0,025	0,01	18	12,5	2,7
Obtenu produit	0,027	1,7	0,37	0,024	0,0002	17,5	12,5	2,47

Éléments	Ti	Ta	Nb	Cu	B	Co	N <sub>2</sub>
Imposé coulée (min)							0,06
(Max)	0,015	0,01	0,01	0,4	0,002	0,25	0,08
Obtenu produit	0,005	0,003	0,005	0,1	0,0005	0,04	0,072

Tableau 2.2 – Composition chimique de l'acier 316L utilisé (pourcentages massiques)

Ce métal est couramment utilisé dans l'industrie agro-alimentaire, le domaine bio-médical ou encore le secteur de la production d'énergie grâce à sa très bonne soudabilité. Il fait donc l'œuvre de plusieurs études et ses propriétés physiques sont, dans leur majorité, disponibles dans la littérature. Dans ce travail de thèse, aucune étape de caractérisation n'est donc envisagée. Les propriétés de cet acier et les références associées sont présentées par la suite.

### 2.5.2 Propriétés thermophysiques

Dans ce paragraphe, sont présentées quelques données bibliographiques dans lesquelles les propriétés thermophysiques de l'acier 316L sont fournies. Parmi ces travaux se distinguent ceux portant sur la détermination des propriétés et ceux qui se limitent à leur utilisation. Les figures 2.2, 2.3 et 2.4 illustrent la dispersion des propriétés trouvées dans la littérature.

Dans la modélisation de l'anode présentée dans ce chapitre, nous utilisons des propriétés thermophysiques fonction de la température. De ce fait, les recherches sont orientées dans ce sens, néanmoins, quelques valeurs ponctuelles sont associées aux évolutions, pour confirmation. Sur les figures, les références les moins intéressantes sont signalées par un numéro et davantage d'intérêt est porté sur les courbes identifiées par le nom de l'auteur principal. Les références et les données collectées sont résumées dans le tableau 2.3.

Nom graphe	Références	Informations
[1]	[22]	Table de $\lambda$ , $\rho$ , $c_p$ et $L_m$ dans le solide (Note : le materiau est un acier 316L avec 70 ppm de Soufre)
[2]	[28]	Relation $\lambda$ , $\rho$ et $c_p$ sur [0,1100°C]
[3]	[100]	Masse volumique
[4]	[42]	$\lambda$ , $\rho$ , $c_p$ et $\beta$ dans le materiau solide. Émissivité donnée à 0,4
[5]	[57]	$\lambda$ et $c_p$ ponctuelles avec température de solidus
[6]	[59]	Table $\lambda$ et $c_p$ avec une valeur de $\beta$
[7]	[70]	Courbe $\lambda$ sur [0,900°C]
[8]	[99]	Valeurs ponctuelles pour $\rho$ , $c_p$ et $\sigma_{EM}$ . Tables pour $\beta$ et $\lambda$
[9]	[109]	Tables pour $\lambda$ , $c_p$ et $\beta$ . Valeur ponctuelle de $\rho$
[10]	[121]	Valeurs ponctuelles $\rho$ , $c_p$ , $\lambda$ , $\beta$ et de $T_{fus}$
[Wilthan]	[124]	Données thermophysiques pour un métal proche du 316L
[Kim]	[65]	Données thermophysiques
[Mills]	[90]	Recueil bibliographique de l'ensemble des propriétés

Tableau 2.3 – Données disponibles dans la littérature pour l'acier 316L

#### Pour le problème thermique

La figure 2.2 présente des valeurs et évolutions de masses volumiques répertoriées en fonction de la température. Les valeurs ponctuelles, à température ambiante, confirment les premiers points des évolutions. Une concordance est observée entre les évolutions obtenues par K.C. Mills et al. ([90]) et C.S. Kim et al. ([65]). Cependant, celles provenant de B. Wilthan et al. ([124]) sont supérieures aux précédentes. Il est probable que cette différence provienne du choix du matériau, légèrement différent de l'acier 316L.

La figure 2.3 montre que l'évolution de la conductivité thermique est sensiblement différente en fonction des références. Ici encore, les références [90] et [65] donnent des résultats très similaires pour la phase solide, les données de Wilthan ([124]) sont légèrement inférieures. Pour la phase liquide, on peut constater que les données sont plus rares et montrent de grandes disparités. En effet, la conductivité thermique est particulièrement difficile à mesurer à très haute température. De plus, l'aspect convectif peut présenter un caractère perturbateur dans la mesure. Pour limiter

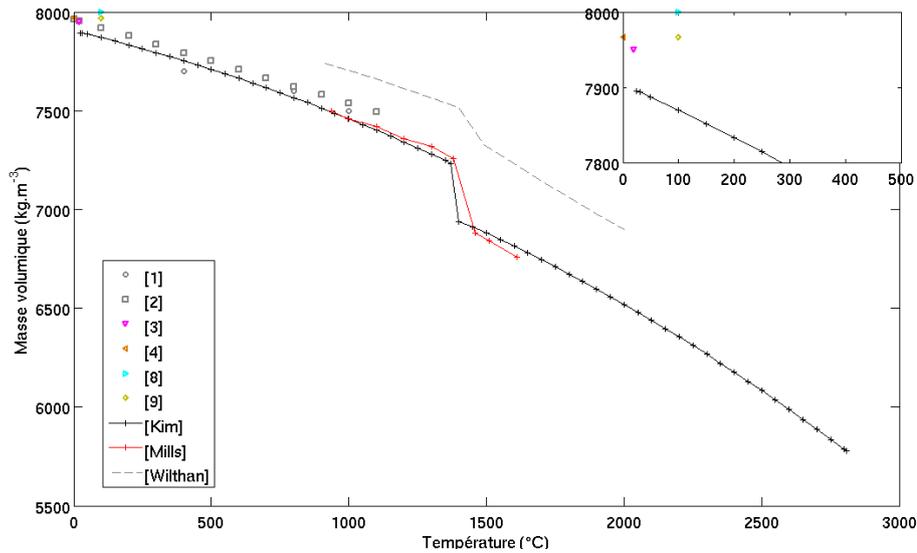


Figure 2.2 – Évolution de la masse volumique de l’acier inoxydable 316L en fonction de la température

cet effet, les travaux de Wilthan ([124]) sont basés sur la mesure de conductivité électrique qui permet de déduire la conductivité thermique selon la relation de Wiedmann-Franz. Les valeurs de Kim ([65]) sont particulièrement faibles par rapport aux autres références. Aussi, la surévaluation de la courbe relative à [124], par rapport aux données issues de [90] semble être due, ici encore, au matériau en lui-même.

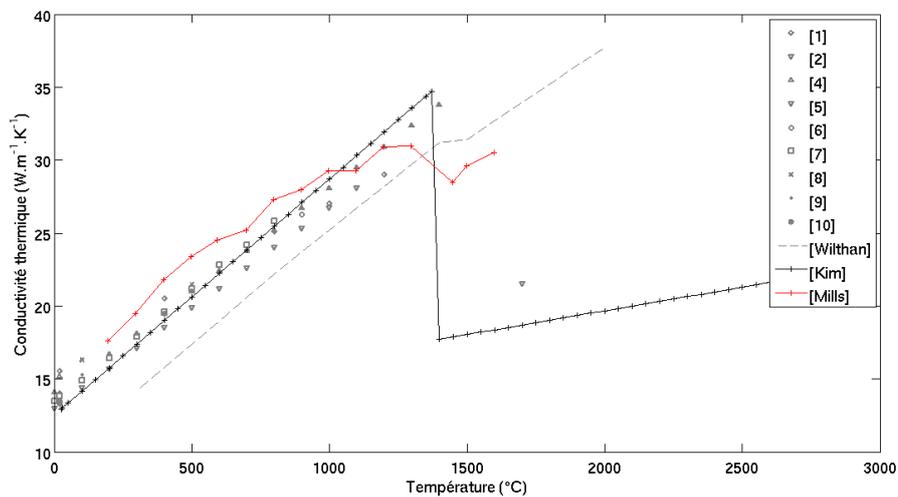


Figure 2.3 – Évolution de la masse conductivité thermique de l’acier inoxydable 316L en fonction de la température

Les courbes représentant la chaleur massique, de la figure 2.4, présentent aussi une assez bonne adéquation dans le solide, et d’importants écarts dans le liquide. Les valeurs issues de Wilthan ([124]), remises en question dans les deux précédentes remarques, confortent les données provenant de Mills ([90]). En revanche, celles de Kim ([65]) sont bien plus faibles.

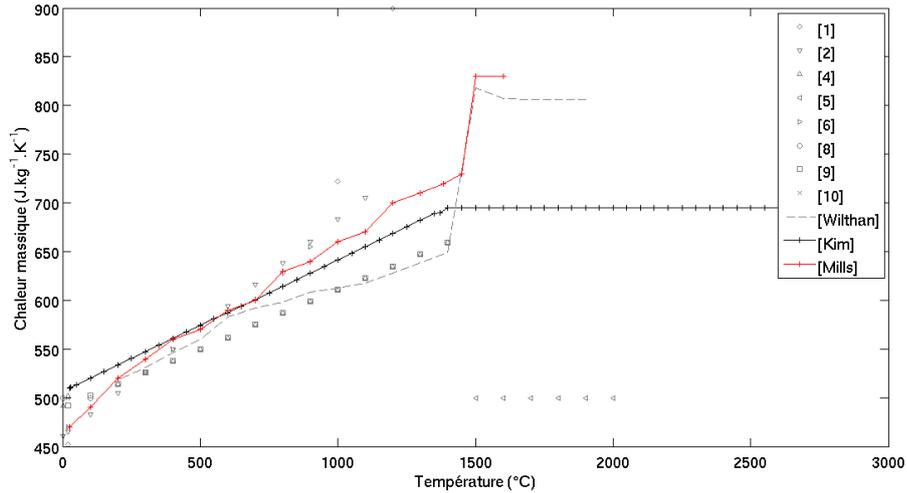


Figure 2.4 – Évolution de la chaleur massique à pression constante de l'acier inoxydable 316L en fonction de la température

Dans notre étude, nous avons retenu les données de Mills [90] pour ces trois propriétés.

Les autres propriétés physiques sont aussi issues de la littérature. Les données collectées étant parfois légèrement différentes, nos choix sont donc faits en fonction de la cohérence des valeurs. Par exemple, le changement de phase liquide-solide a lieu :

- dans l'intervalle [ $T_S = 1385^\circ\text{C}, T_L = 1450^\circ\text{C}$ ] selon [90]
- à la température  $T_{fus} = 1375^\circ\text{C}$  selon [121]
- à la température  $T_{fus} = 1420^\circ\text{C}$  selon [57]
- dans l'intervalle [ $T_S = 1371^\circ\text{C}, T_L = 1399^\circ\text{C}$ ] selon [5]

Là encore, nous conservons les valeurs de Mills pour  $T_S$  et  $T_L$  [90].

De même, nous retenons pour la chaleur latente de fusion, la valeur de  $L_m = 260000 \text{ J.kg}^{-1}$  provenant de [90].

Concernant l'émissivité de la surface du matériau, X. Ficquet et al. ([42]) donnent une valeur de 0,4. Quant au coefficient d'échange par convection, X. Shan et al. ([109]) proposent  $h_{cv} = 5,6 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  alors que A. Traidia et al. ([115]) utilisent une valeur de  $h_{cv} = 15 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ .

Dans notre étude, l'échantillon usiné présente d'importantes aspérités, ce qui favorisera les échanges avec l'extérieur. Les précédentes valeurs sont donc majorées à  $\varepsilon = 0,5$  pour l'émissivité et  $h_{cv} = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  pour le coefficient de convection.

### Pour le problème de mécanique des fluides

Rappelons que le problème de mécanique des fluides est résolu pour un milieu incompressible donc, pour une masse volumique constante. Cette hypothèse impose la prise en compte d'une

masse volumique moyenne. Compte tenu de la figure 2.2, la valeur considérée est  $\rho_L = 6348 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

La viscosité dynamique du métal liquide est une propriété particulièrement influente sur le schéma d'écoulement. Cependant, en raison des hautes températures, assez peu d'informations sont disponibles sur sa variation en fonction de la température. La figure 2.5 illustre les valeurs utilisées dans cette simulation. La grande majorité des points de ce graphique sont issues de [65], néanmoins les viscosités appliquées dans la zone pâteuse sont définies de façon à tenir compte de la solidification du matériau. En effet, la valeur de la viscosité à la température du solidus est délibérément surévaluée. Cette approximation, permet de limiter la vitesse du fluide dans cette zone et donc de faciliter l'application de la condition de Darcy.

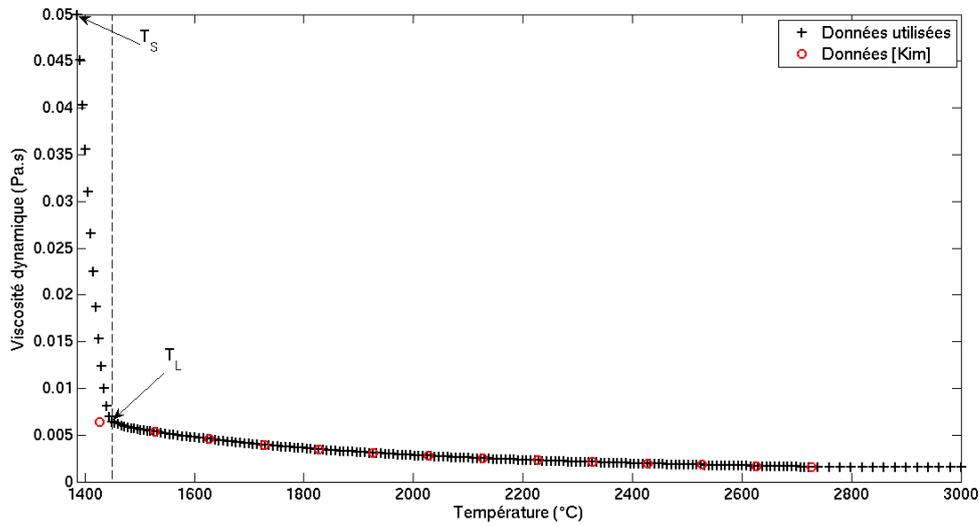


Figure 2.5 – Évolution de la viscosité dynamique de l'acier inoxydable 316L en fonction de la température

Concernant le taux de soufre, une hypothèse de 45 *ppm* a été adoptée. Bien que le fournisseur indique un taux de soufre de 2 *ppm*, les formes du bain calculées par le modèle concordent avec celles observées expérimentalement à condition de supposer cette valeur de 45 *ppm*. Il est à noter que la composition de l'acier 316L révèle également la présence d'autres éléments tensio-actifs comme, par exemple, le phosphore (240 *ppm*). L'évolution de la tension superficielle en fonction de la température n'étant pas disponible dans la littérature pour l'alliage complexe qu'est cet acier (à notre connaissance), nous avons choisi d'ajuster le taux de soufre dans la loi proposée par P. Sahoo et al. [107] afin de reproduire les bonnes formes de bain.

Rappelons la loi considérée : La variation de  $\gamma$  par rapport à la température s'écrit :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial T} = -A - R\Gamma_s \ln(1 + K_g a_i) - \frac{K_g a_i}{(1 + K_g a_i)} \frac{\Gamma_s \Delta H^o}{T} \quad (2.42)$$

$$K_g = k_l \exp\left(-\frac{\Delta H^o}{RT}\right) \quad (2.43)$$

Paramètres	Valeurs	
$i$	Soufre	
$k_l$	$3,18.10^{-3}$	
$\Delta H^o$	$-1,66.10^8$	$(J.(kg.mol)^{-1})$
$\Gamma_s$	$1,3.10^{-8}$	$(kg.mol.m^{-2})$
$a_i$	0,0045	$(\%_m)$
$A$	$4,3.10^{-4}$	$(N.m^{-1})$
$T_{fus}$	1823	$(K)$

Tableau 2.4 – Paramètres des relations 2.42 et 2.43 (P. Sahoo [107])

avec :  $k_l$  une constante liée à l'entropie de ségrégation,  $\Delta H^o$  l'enthalpie standard d'adsorption,  $\Gamma_s$  l'excès de saturation en surface,  $a_i$  l'activité de l'espèce  $i$  (pourcentage massique),  $\gamma_m^o$  la tension de surface du métal pur,  $A$  la valeur (négative) de  $\partial\gamma/\partial T$  du métal pur et  $T_{fus}$  la température de fusion du métal.

La valeur du coefficient d'expansion volumique  $\beta$  est imposée à  $1,41.10^{-5} K^{-1}$  ([21]).

### Pour le problème électromagnétique

Dans ce cas, les paramètres à définir sont : la conductivité électrique du matériau  $\sigma_{EM}$ , la permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$  et la perméabilité magnétique relative  $\mu_r$ . Les valeurs de la conductivité électrique observées dans la littérature sont comprises entre  $0,725.10^6 S.m^{-1}$  [124] et  $1,4.10^6 S.m^{-1}$  [5]. Nous choisissons donc une valeur intermédiaire, soit  $\sigma_{EM} = 1.10^6 S.m^{-1}$ .

Une singularité de cet acier est que sa structure cristalline cubique à faces centrées (l'austénite) en fait un matériau non ferromagnétique ( $\mu_r \gg 1$ ) comme la plupart des aciers, mais paramagnétique. Cette caractéristique implique une perméabilité relative proche de 1. L'approximation qui est faite est donc d'imposer  $\mu = \mu_0$ . Bien que présente dans les équations, la permittivité diélectrique d'un métal n'a pas de sens, elle est donc nulle dans ce problème  $\epsilon = 0$ .

## 2.6 Maillage et paramètres de résolution

Tout d'abord, rappelons que l'ensemble des calculs a été effectué à l'aide du logiciel COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> sous sa version 3.5a.

### 2.6.1 Introduction

Dans la résolution d'équations différentielles par la méthode des éléments finis, la discrétisation spatiale du domaine est une étape clef dans la définition du problème. En effet, un maillage trop grossier associé à un critère de convergence du problème non linéaire trop faible entraîne l'impossibilité de déterminer une solution. Une augmentation de ce critère pour le même maillage, permet de déterminer une solution, cependant, elle peut ne pas être optimale.

La géométrie définie pour ces premiers calculs est présentée sur la figure 2.6. La zone la plus sensible aux effets du maillage est le domaine dans lequel la mécanique des fluides est résolue : **Volume 1** (figure 2.6). De manière générale, c'est aussi la partie de la géométrie présentant les plus forts gradients donc l'endroit où le maillage doit être le plus fin.

Différents maillages de ce domaine sont donc étudiés.

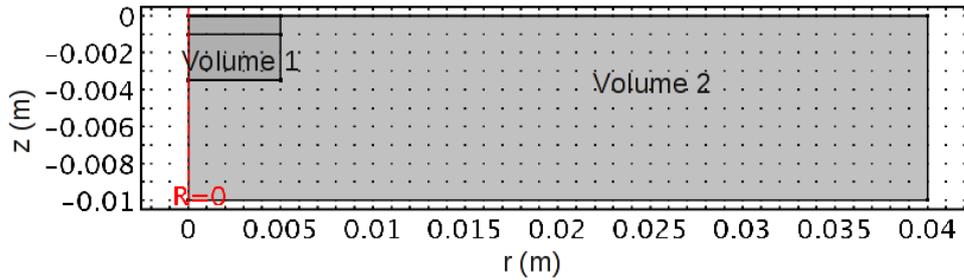


Figure 2.6 – Géométrie définie sous COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>

La méthode de validation du maillage est donc la suivante :

Pour un critère de convergence suffisamment faible (0,1% de la solution calculée), les dimensions du maillage sont conservées lorsque la solution ne varie quasiment plus pour un raffinement de ce maillage.

## 2.6.2 Maillages et paramètres de la simulation test

Les ressources numériques étant limitées, un compromis est donc fait entre le niveau de variation résiduelle de la solution et le temps de calcul (ou de la consommation de la mémoire). De plus, les dimensions d'un maillage sont dépendantes de la physique à représenter. En d'autres termes, plus les variations de la variable à calculer sont importantes, plus les mailles doivent être fines. Dans le cas-test présenté dans ce paragraphe, les paramètres caractéristiques, comme les rayons des sources, sont modifiés de manière à être plus contraignants pour la résolution. Aussi, notons que le problème de frontière mobile n'est pas résolu dans cette phase de test.

Pour commencer, définissons les nouveaux paramètres de ce modèle dans le tableau 2.5.

Paramètres modèle	Valeurs originales	Valeurs modifiées
Rayon de la source thermique $r_{th}$ (m)	<b>0,002</b>	<b>0,0014</b>
Rayon de la source électrique $r_{elec}$ (m)	<b>0,0017</b>	<b>0,0011</b>
Rendement thermique du procédé $\eta$	<b>0,65</b>	<b>0,9</b>

Tableau 2.5 – Définition de paramètres plus contraignants

Le maillage étudié ici est composé d'éléments quadrangles associés à une interpolation quadra-

tique pour la température et les composantes du vecteur vitesse, linéaire pour la pression et cubique pour l'induction magnétique (figure 2.7). Ce maillage est régulier dans le domaine dans lequel est résolu la mécanique des fluides et libre dans le reste de la géométrie.

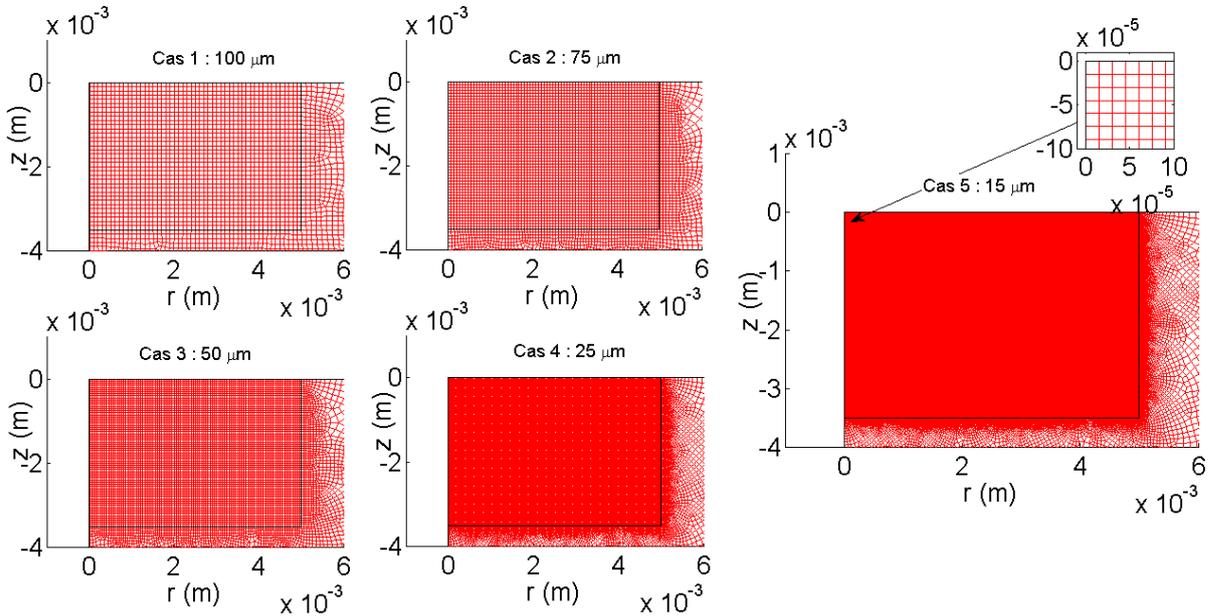


Figure 2.7 – Représentation des cinq maillages étudiés de  $15 \mu m$  à  $100 \mu m$

Précisons que dans le logiciel, la discrétisation temporelle est déterminée de manière "auto-adaptative" et évolue en fonction de la convergence du problème non linéaire. L'utilisateur contrôle cependant la taille maximale du pas de temps. Ici les calculs ont été effectués avec un pas de temps maximal de  $0,0005 s$  pour que l'aspect adaptatif influence le moins possible les futurs comparaisons.

### 2.6.3 Résultats

L'influence du maillage est étudié à partir des positions de l'isotherme du solidus (considéré comme le front) et des profils de vitesse obtenus en surface de zone fondue. Les résultats présentés sont obtenus après, respectivement, une et deux secondes de tir. Ces deux instants d'observation sont choisis en raison du comportement fortement transitoire des phénomènes durant cette période.

Le maillage correspondant au cas 1 ( $100 \mu m$ ) est trop grossier pour permettre la résolution complète du problème numérique. En d'autres termes, il ne permet pas l'obtention de résultats validant le critère de convergence qui est défini par l'utilisateur (ici :  $0,1\%$  de chaque variable calculée). Pour cette raison, ce cas n'apparaît pas dans l'analyse des résultats.

#### 2.6.3.1 Position du front

L'influence du maillage sur la position du front est testée car il s'agit de l'un des résultats finaux que nous souhaitons observer à l'issue de ce travail de simulation.

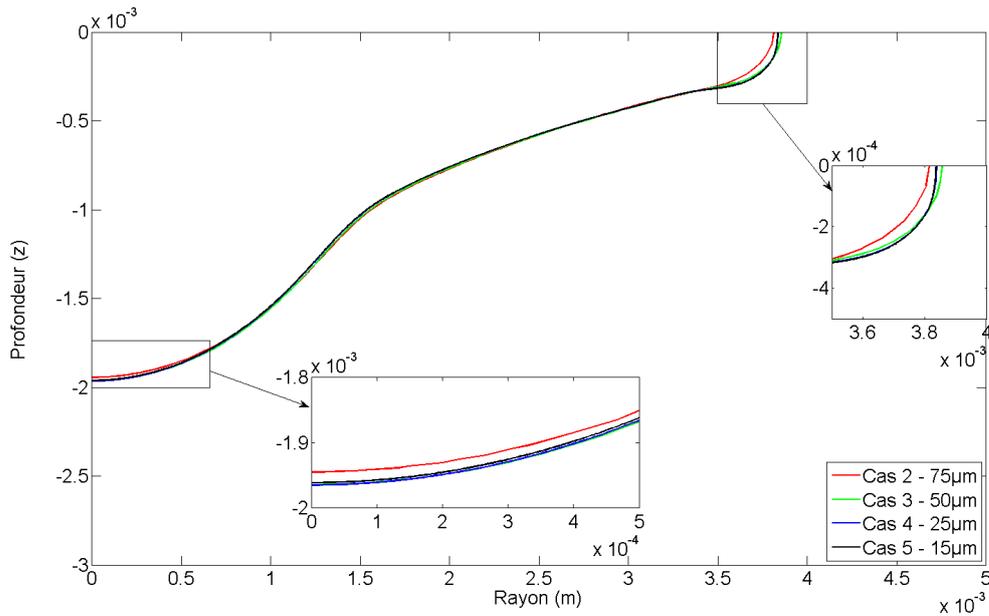


Figure 2.8 – Forme du "front" de fusion à  $t = 1 s$

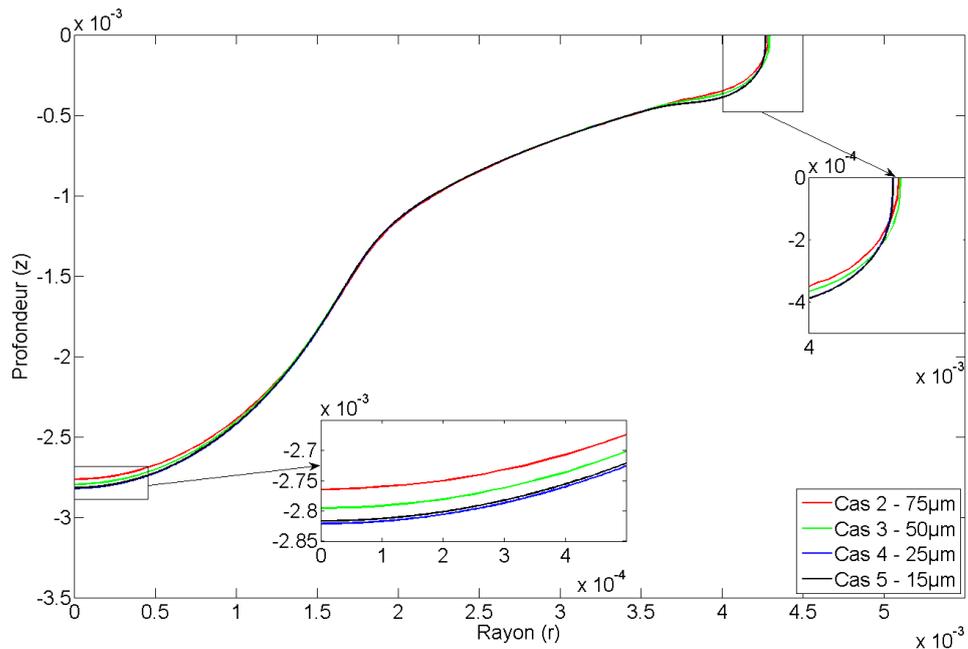


Figure 2.9 – Forme du "front" de fusion à  $t = 2 s$

Sur les figures 2.8 et 2.9, l'effet du maillage est principalement visible sur les extrémités de la zone fondue, i.e. à proximité de la surface de la pièce et de l'axe de symétrie. De manière générale, les courbes des cas 4 et 5 (25 et 15  $\mu m$ ) sont superposées pour les deux durées. Le résultat du cas 3 est plus discutable. En effet, à l'issue de la première seconde, la forme obtenue est très proche des cas 4 et 5. Cependant, après deux secondes, l'erreur est plus marquée. Pour le dernier cas, correspondant à une discrétisation de 75  $\mu m$ , la solution est clairement perturbée par le maillage.

Il est à remarquer, que les résultats obtenus pour les cas 4 et 5 sont quasi-superposés, ce

qui démontre la bonne convergence spatiale. Par conséquent, une discrétisation en éléments de  $25 \mu m$  semble être un bon compromis.

Notons cependant, que les écarts observés entre les résultats obtenus pour les différentes discrétisations restent d'un ordre de grandeur relativement faible ( $\approx 0,05 mm$ ) compte tenu des incertitudes sur le modèle lui-même.

### 2.6.3.2 Vitesse en surface de zone fondue

Le champ de vitesse en surface de zone fondue est une conséquence directe de l'effet Marangoni, le moteur le plus significatif de l'écoulement dans le bain liquide. C'est donc en surface que les vitesses sont les plus importantes, donc les plus exigeantes envers le maillage. Remarquons, aussi, que seule la composante radiale de la vitesse existe en raison de la condition de glissement imposée dans le problème de mécanique des fluides.

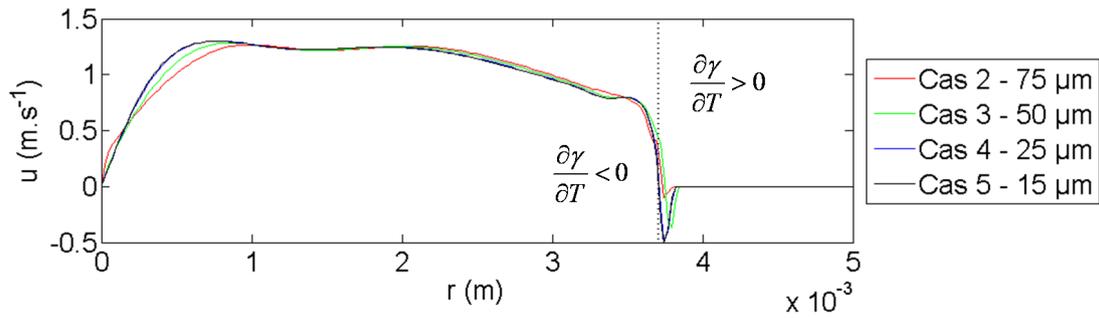


Figure 2.10 – Effet du maillage sur la vitesse en surface à  $t = 1 s$

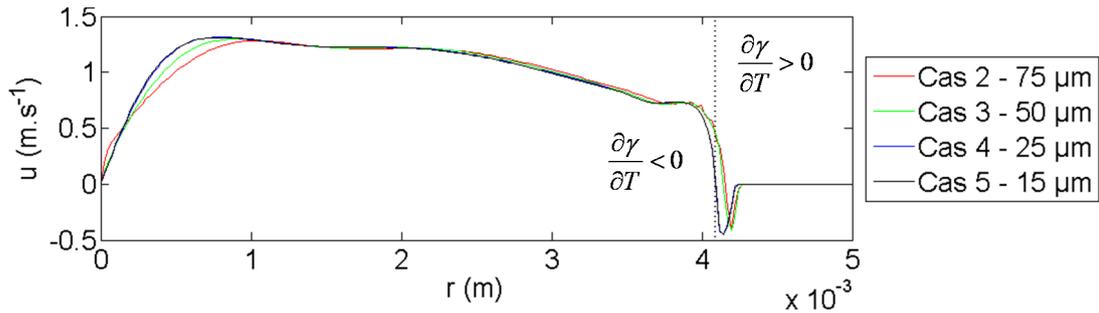


Figure 2.11 – Effet du maillage sur la vitesse en surface à  $t = 2 s$

Les profils de champs de vitesse présentent des schémas d'évolution similaires, quelque soit la durée simulée. Une première zone d'écoulement centrifuge apparaît pour les rayons les plus faibles, lorsque la température sur la frontière est la plus élevée, donc lorsque le coefficient  $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$  est négatif. À l'inverse, un écoulement centripète est créé en périphérie de zone fondue, lorsque les températures sont plus faibles et que le coefficient  $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$  devient positif. Précisons que ces écoulements contradictoires favorisent la pénétration du bain sur les contours de la zone fondue.

De manière générale, les figures 2.10 et 2.11 présentent des résultats similaires. Les champs de vitesse calculés avec des mailles de 25 et 15  $\mu m$  sont encore très proches. Les vitesses obtenues dans les cas 2 et 3 présentent des erreurs dont l'importance dépend de la position sur l'axe des rayons. Divisons cet axe en trois zones :

1. Pour  $0 < r < 1 \text{ mm}$  : les écarts suivent une évolution logique. Un maillage trop grossier entraîne une sous-évaluation de la vitesse.
2. Pour  $1 \text{ mm} < r < 3,5 \text{ mm}$  : les écarts sont relativement faibles.
3. Pour  $3,5 \text{ mm} < r < r_{max}$  : le maillage perturbe la position de l'inversion du sens de l'écoulement dû à l'effet Marangoni. Dans le cas 3, cette transition est mal positionnée sur l'axe  $r$  et dans le cas 2, pour  $t = 1 \text{ s}$ , l'inversion de l'écoulement due à l'effet Marangoni n'est pas représentée et donc une information très sensible n'est pas représentée.

### Bilan

De cette analyse, il est possible de conclure que pour des mailles de dimension inférieure à 25  $\mu m$ , la solution calculée numériquement ne dépend plus de la finesse du maillage.

De plus, ce cas particulièrement contraignant en terme de dimension de mailles, illustre les faibles amplitudes de l'erreur causée par une discrétisation trop large. Cependant, il permet aussi d'observer une autre conséquence : la non représentation de phénomènes importants tels l'inversion du sens de l'écoulement. Donc, s'il était possible de se satisfaire d'une solution faiblement perturbée, cet effet de "non représentation", oblige à l'utilisation de mailles de 25  $\mu m$ .

## 2.7 Distribution de la chaleur latente et condition de Darcy

Après l'analyse de l'effet du maillage sur les solutions du problème numérique, certains autres paramètres doivent être observés plus en détail. En effet, les deux autres éléments de la simulation qui sont à définir par l'utilisateur sont la distribution de la chaleur latente dans la chaleur massique  $c_{p,eq}$  et les paramètres de la condition de Darcy (1.16).

Dans les deux paragraphes suivants intervient la notion de fraction liquide  $f_l$ , rappelons que nous avons retenu une relation linéaire (2.44) :

$$f_L = \begin{cases} 1 & T > T_L \\ \frac{T-T_S}{T_L-T_S} & T_S \geq T \geq T_L \\ 0 & T < T_S \end{cases} \quad (2.44)$$

Notons néanmoins que d'autres évolutions sont envisageables et citons notamment l'ouvrage de K. C. Mills [90] dans lequel des résultats expérimentaux sont présentés. Nous ne retenons pas ces derniers car ils montrent que la fraction liquide n'évolue sensiblement que sur un très faible intervalle de température ( $< 30 \text{ }^\circ\text{C}$ ), rendant ainsi la résolution numérique difficile.

### 2.7.1 Distribution de la chaleur latente

Pour cette analyse, l'expression de la chaleur massique équivalente que nous avons retenue (chapitre 1) est la suivante :

$$c_{p,eq} = c_p + L_m D(T) \quad (2.45)$$

Avec  $D(T)$  un paramètre de distribution lié à la variation de la fraction liquide en fonction de la température (2.46) :

$$D(T) = \frac{\partial f_l}{\partial T} \quad (2.46)$$

Dans notre étude la fraction liquide  $f_l$  est supposée varier linéairement en fonction de la température. Des lissages sont donc nécessaires afin de traiter les discontinuités en  $T = T_S$  et  $T = T_L$ . De plus, afin de valider la conservation de l'énergie, Dans la relation 2.45, la fonction  $D(T)$  est définie de manière à obtenir  $\int_{-\infty}^{+\infty} D(T)dT = 1$ .

Ce paramètre  $D$ , est généralement approché par une fonction exponentielle (2.47) définie indépendamment de la fraction liquide :

$$D(T) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta T^2} \exp\left(-\frac{(T - T_{fus})^2}{\Delta T^2}\right) \quad (2.47)$$

Dans 2.47,  $\Delta T$  est l'écart-type de la distribution et son choix est établi de manière à avoir  $\int_{T_S}^{T_L} D(T)dT \approx 1$ .

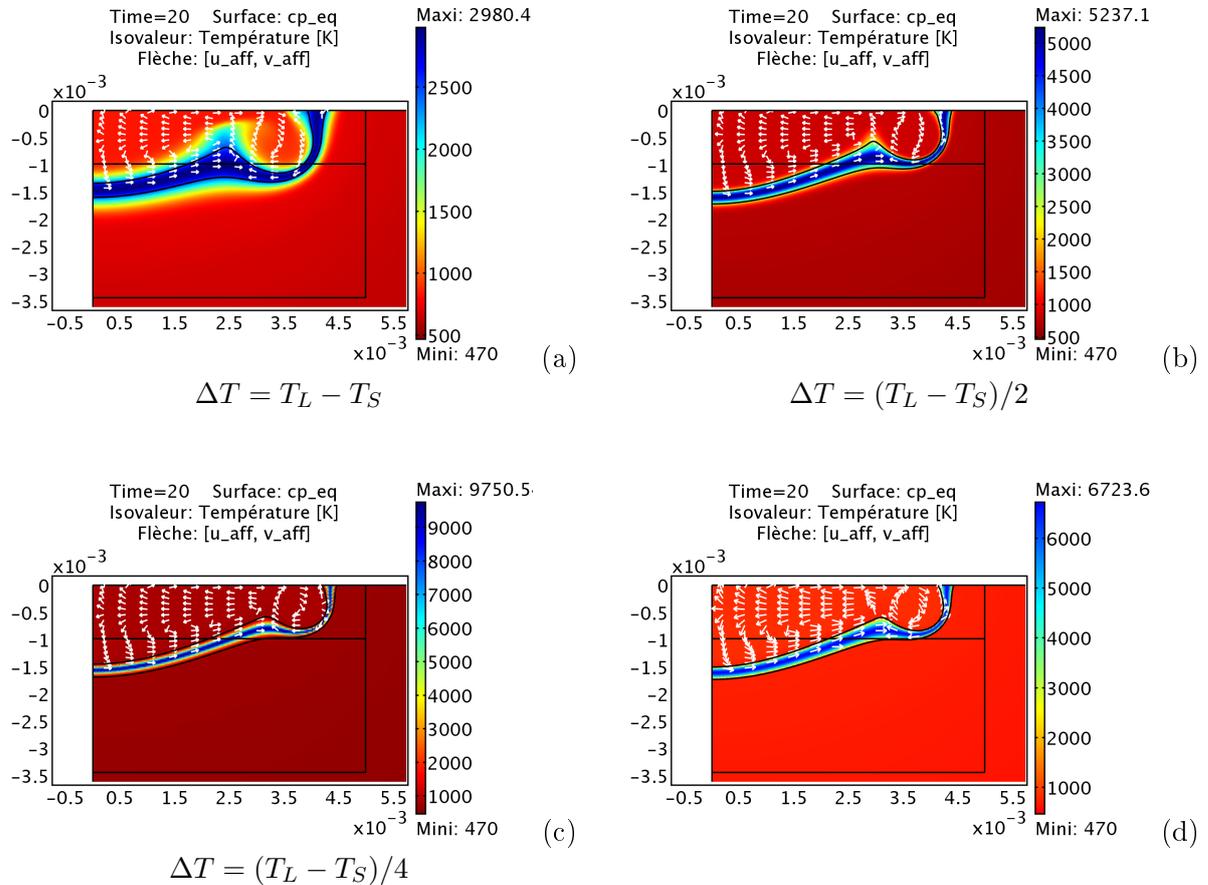


Figure 2.12 – Effet de la distribution de la chaleur latente (le champ de couleur représente  $c_{p,eq}$ ),  $D(T)$  calculé avec l'équation 2.47 pour (a), (b) et (c) et avec l'équation 2.46 pour (d)

Afin d'illustrer cette analyse, les résultats de quatre simulations dans lesquelles les types de distribution sont différents, sont présentés sur la figure 2.12. Ces résolutions sont obtenues pour des mailles triangulaires de  $50 \mu\text{m}$  de côté dans le volume où la mécanique des fluides est résolue. Dans le reste de la géométrie, le maillage est de dimension libre avec un taux d'accroissement de 1,2.

Sur cette figure, trois cas (a), (b) et (c) résultent de l'utilisation de distributions Gaussiennes (2.47) et un cas (d) est obtenu par l'expression basée sur la variation de la fraction liquide (2.46).

Dans notre étude, l'écart-type est défini comme étant successivement : la zone pâteuse  $\Delta T = T_L - T_S$ , sa moitié  $\Delta T = \frac{T_L - T_S}{2}$  et son quart  $\Delta T = \frac{T_L - T_S}{4}$ . Le premier cas est volontairement trop large et une majeure partie de l'énergie de changement de phase est appliquée, soit dans la zone liquide ( $T > T_L$ ), soit dans la zone solide ( $T < T_S$ ). Dans le second cas, seuls 63% de la chaleur latente est contenu dans l'intervalle de température  $[T_S, T_L]$ . Pour que ce pourcentage soit augmenté à 98%, dans le troisième cas, nous posons  $\Delta T = \frac{T_L - T_S}{4}$ . Cependant, à cause du déplacement du front dans le domaine, cela demande un maillage très fin dans l'ensemble du Volume 1. En revanche, la formulation dépendant de la fraction liquide (2.46) permet une distribution de l'énergie comprise totalement dans la zone pâteuse.

Sur la figure 2.12, les valeurs affichées correspondent à la chaleur massique équivalente. Plus le paramètre de distribution est faible, plus la valeur maximale de cette chaleur est importante. De plus, dans le cadre de la résolution numérique, ce paramètre a une influence sur la durée de résolution. En l'occurrence, l'utilisation de la variation de la fraction liquide en fonction de la température (2.46) entraîne un "surcoût", en terme de temps de calcul, de 8% par rapport à une distribution Gaussienne d'écart-type  $\Delta T = T_L - T_S$ . Cependant, cette approximation perturbe le calcul des champs de températures et de vitesses à proximité de la transition liquide - solide. Par conséquent, la position du front de fusion (figure 2.12) s'en trouve, elle aussi, influencée.

Compte tenu de ces observations, une distribution Gaussienne d'écart-type égal à  $\Delta T = \frac{T_L - T_S}{2}$  semble être un bon compromis entre la durée de résolution et la perturbation des résultats calculés.

### 2.7.2 Paramètres de la loi de Darcy

Rappelons que cette loi (2.48), présentée dans le chapitre 1 est en fait une condition d'extinction du champ de vitesse dans la phase solide. Elle est définie en fonction de la fraction liquide  $f_l$ , d'un paramètre  $b$  et d'un autre paramètre qu'il est possible de définir soit de façon arbitraire, soit de façon physique  $c_l$  (équation 2.49). Nous rappelons ici ces équations :

$$\vec{S} = \frac{\mu_{L,moy}}{K} \vec{V} \quad (2.48)$$

Où  $\mu_{L,moy}$  est la viscosité dynamique du fluide considéré et la perméabilité  $K$  (2.49) :

$$K = \frac{f_L^3}{c_l(1-f_L)^2} \approx \frac{b+f_L^3}{c_l(1-f_L)^2} \quad (2.49)$$

Avec  $f_L$  la fraction volumique de liquide.

Le paramètre  $c_l$ , lorsqu'il est calculé, est défini par la relation 2.50 :

$$c_l = \frac{180}{d^2} \quad (2.50)$$

La configuration de ce jeu de paramètres aura pour conséquence de créer un champ de vitesses plus ou moins proche de zero dans la phase solide.

Par exemple, dans le tableau 2.6, sont regroupés les résultats de plusieurs tests sur les valeurs des précédents paramètres. Notons que dans ce tableau, ce n'est pas  $c_l$  qui est affiché mais son produit avec la viscosité  $\mu_{L,moy}$ , que nous avons défini constant pour ce terme.

$$C_l = c_l \mu_{L,moy}$$

N°	1			2			3		
Paramètres	b	$C_l$	$\frac{C_l}{b}$	b	$C_l$	$\frac{C_l}{b}$	b	$C_l$	$\frac{C_l}{b}$
Valeurs	$1.10^{-3}$	$7, 2.10^7$	$7, 2.10^{10}$	$1.10^{-5}$	$7, 2.10^7$	$7, 2.10^{12}$	$1.10^{-8}$	$7, 3.10^7$	$7, 3.10^{15}$
$V_{sol}$	$1.10^{-4}$			$1.10^{-6}$			$1.10^{-8}$		

N°	4			5			6		
Paramètres	b	$C_l$	$\frac{C_l}{b}$	b	$C_l$	$\frac{C_l}{b}$	b	$C_l$	$\frac{C_l}{b}$
Valeurs	$1.10^{-8}$	$1.10^5$	$1.10^{13}$	$1.10^{-8}$	$1.10^{10}$	$1.10^{18}$	$1.10^{-12}$	$1.10^{12}$	$1.10^{24}$
$V_{sol}$	$1.10^{-6}$			$1.10^{-11}$			$1.10^{-13}$		

Tableau 2.6 – Valeurs maximales du champs de vitesse  $V_{sol}$  obtenues pour différents paramètres de la condition de Darcy

Dans le tableau 2.6, la valeur de  $C_l = 7, 3.10^7 Pa.s.m^{-2}$  est déterminée à partir des relations (1.16 à 1.18) en considérant une valeur de  $d = 1.10^{-4}m$  et une viscosité de  $0,004 Pa.s$ . Les autres valeurs sont arbitraires.

Le champ de vitesse obtenu ( $V_{sol}$ ), est la valeur maximale observée dans la phase solide. Il est possible d'observer que dans le cas 1, où la valeur de  $c_l$  dépend de la longueur dendritique et  $b = 10^{-3}$ , le champ de vitesse obtenu dans la phase solide devient non négligeable. Des précautions sont donc à prendre sur la valeur de  $b$  lorsque  $c_l$  est déterminé par le calcul. La vitesse la plus faible est observée pour le cas le plus extrême (N°6). Cependant, la source ainsi créée devient trop importante et elle influence la résolution du problème numérique. Les cas intermédiaires (3 et 5) permettent l'obtention d'un champ de vitesse suffisamment faible sans contraindre la résolution du problème de mécanique des fluides. La configuration retenue est donc la solution N°5.

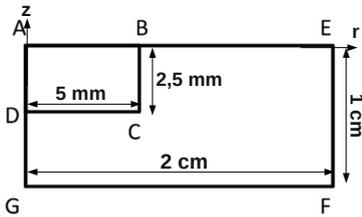
## 2.8 Validation bibliographique

Le modèle que nous avons développé repose sur le couplage de trois phénomènes : les transferts de chaleur, la mécanique des fluides et l'électromagnétisme. En l'absence de solutions analytiques pour valider ce modèle, nous avons comparé nos résultats avec ceux disponibles dans la littérature. Les travaux de A. Traidia et al. [115] ont été retenus. Leur étude porte aussi sur une application statique du procédé TIG pour lequel l'énergie est appliquée de façon pulsée. Seule l'anode a été modélisée, comme dans notre cas.

### 2.8.1 Description du modèle

Nous choisissons cet article comme référence en raison des nombreuses similarités qu'il présente avec notre étude. En effet, l'analyse est menée pour une géométrie axisymétrique et les problèmes de transfert thermique, de mécanique des fluides et d'électromagnétisme sont définis avec des hypothèses identiques aux nôtres (effet Marangoni, forces de Lorentz,...).

Le matériau étudié est aussi un acier inoxydable, mais de type 304 à 72 ppm de soufre et dont les propriétés thermophysiques sont supposées constantes mais dépendantes de la phase (figure 2.14). Notons que la valeur de viscosité dynamique (0,05 Pa.s) est supérieure d'un facteur 10 à celle que nous avons considérée. De plus, les coefficients caractérisant la variation de tension superficielle en fonction de la température sont différents de ceux que nous utilisons dans notre étude ([107] - équation 2.42). Le changement de phase est définie de la même manière pour la fusion et la solidification (pas de phénomène inertiel de type surfusion).



Nomenclature	Symbol	Value
$a_s$	Activity of sulfur	0.0072 wt%
$A_\gamma$	Constant in surface tension gradient	$3 \times 10^{-4} \text{ N m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$\rho_l$	Density of liquid phase	$6350 \text{ kg m}^{-3}$
$\rho_s$	Density of solid phase	$7500 \text{ kg m}^{-3}$
$T_l$	Liquidus temperature	1723 K
$T_s$	Solidus temperature	1673 K
$C_{pl}$	Specific heat of liquid phase	$720 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$C_{ps}$	Specific heat of solid phase	$602 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$k_l$	Thermal conductivity of liquid phase	$20 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$k_s$	Thermal conductivity of solid phase	$26 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$\mu$	Viscosity	$0.05 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
$\sigma$	Electrical conductivity	$7.7 \times 10^5 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$
$R_g$	Gas constant	$8314.3 \text{ J kg}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$\Delta H_0$	standard heat of adsorption	$-1.88 \times 10^8 \text{ J kg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
$\Gamma_s$	Surface excess at saturation	$1.3 \times 10^{-8} \text{ J kg}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ m}^{-2}$
$\gamma_m$	Surface tension at pure metal	$1.943 \text{ N m}^{-1}$

Figure 2.13 – Géométrie traitée par A. Traidia et al. [115] Figure 2.14 – Propriétés utilisées par A. Traidia et al. [115]

Dans cette étude, les distributions de l'apport de chaleur et de densité de courant sont de type Gaussien. Nous avons retenu le cas pour lequel le courant varie de 80 A à 200 A à une fréquence de 2,5 Hz.

$$Q_{th}(r) = \frac{\eta U I d_{th}}{\pi r_{th}^2} \exp\left(-d_{th} \frac{r^2}{r_{th}^2}\right) \quad (2.51)$$

$$j_0(r) = \frac{Id_{elec}}{\pi r_{elec}^2} \exp\left(-d_{elec} \frac{r^2}{r_{elec}^2}\right) \quad (2.52)$$

avec  $d_{th} = d_{elec} = 3$ , le paramètre de distribution des lois Gaussiennes,  $r_{th,80A} = r_{elec,80A} = 4,2 \text{ mm}$  les écarts-types des sources thermique et électrique pour un courant de  $80 \text{ A}$  et  $r_{th,200A} = r_{elec,200A} = 5 \text{ mm}$ , les écarts-types des sources pour  $200 \text{ A}$ . Les tensions appliquées sont respectivement  $12,6 \text{ V}$  (pour  $80 \text{ A}$ ) et  $15 \text{ V}$  (pour  $200 \text{ A}$ ) et le rendement  $\eta$  est de  $68\%$ .

Dans l'article, l'auteur ne décrit pas les discrétisations spatiales et temporelles utilisées pour cette résolution. Cependant, plus d'informations sur ce travail sont présentées dans la référence [113]. La construction du maillage y est présentée :  $50 \mu\text{m}$  sur la frontière [AB] et  $200 \mu\text{m}$  sur [BC] et [CD] (figure 2.13). Nous avons donc repris ces paramètres pour les comparaisons. À noter que les résultats du modèle de A. Traidia ont été validés expérimentalement par comparaison avec des macrographies.

### 2.8.2 Températures et taille de bain

La comparaison est effectuée sur les résultats présentés dans l'article [115]. Tout d'abord, les évolutions temporelles des dimensions maximales du bain sont présentées sur la figure 2.15, et ensuite, les profils de température en surface du bain sont illustrés pour différents instants sur la figure 2.16. Les largeurs et profondeurs de bain évoluent de façon périodique en raison des créneaux sur le courant imposé.

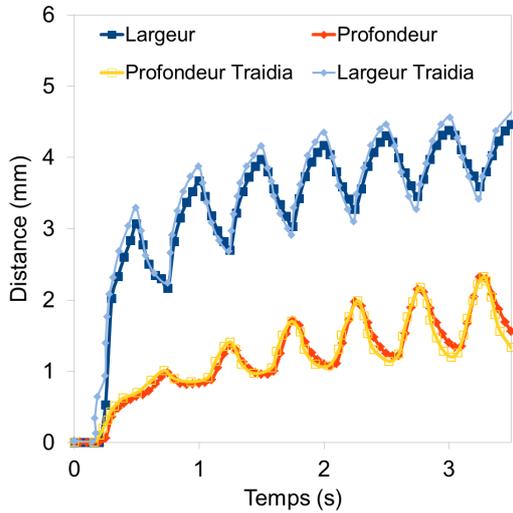


Figure 2.15 – Évolution des dimensions du bain

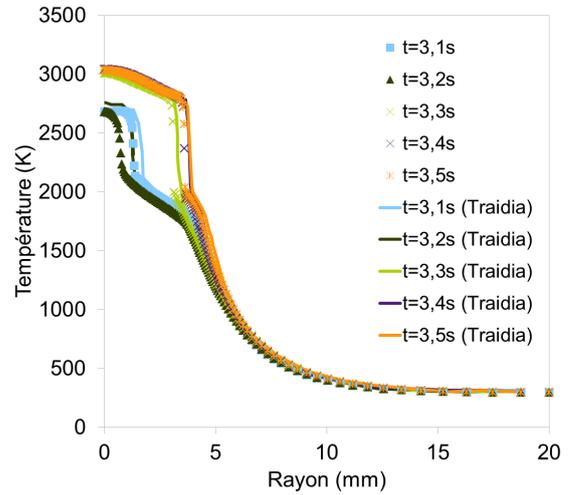


Figure 2.16 – Profils de température en surface de bain

De manière générale, les deux figures 2.15 et 2.16, démontrent une bonne adéquation entre nos résultats et ceux de A. Traidia. Néanmoins, certains écarts sont observés. Par exemple, à plusieurs reprises, les dimensions du bain que nous obtenons sont plus faibles ( $< 3\%$  à  $t = 2 \text{ s}$  - figure 2.15), et les profils de température en surface de bain diffèrent lorsque la source est à son seuil bas ( $80 \text{ A}$ ) (figure 2.16). La cause la plus probable est liée à la discrétisation spatiale qui

semble ne pas être suffisamment fine pour ce type d'étude (nous avons défini la notre par rapport à la sienne). En effet, nous avons montré précédemment l'influence d'un maillage trop grossier sur le champ de vitesse ainsi que sur la forme de la zone fondue. De plus, dans le cas présent, la chaleur latente de changement de phase est distribuée à l'aide d'une chaleur massique équivalente. Or, trop peu d'éléments sont présents dans la zone pâteuse pour intégrer correctement l'énergie de transformation. À noter également, que A. Traidia utilise une viscosité artificielle pour annuler le champ de vitesse dans la phase solide alors que nous avons retenu la condition de Darcy. De même, les paramètres de résolution (choix de la méthode de résolution, tolérances, pas de temps, ...) n'étant pas précisés dans l'article, les écarts peuvent aussi s'expliquer par ces différents choix. Néanmoins, le bon accord obtenu permet de valider les résultats de notre modèle. Notons toutefois, qu'il faudra rester attentif aux différents choix spécifiques au modèle numérique, comme le maillage.

## 2.9 Plan d'expériences numériques

Après avoir étudié l'influence des paramètres purement numériques, nous avons mené une étude de sensibilité sur les paramètres décrivant les sources thermique et électrique, ainsi que sur le taux de soufre. Dans le cas où seule l'anode est modélisée, la démarche classique consiste bien souvent à ajuster les paramètres des sources tels que le rendement  $\eta$  et les deux écarts-types des sources thermique et électrique ( $r_{th}$  et  $r_{elec}$ ) afin d'obtenir des formes de bain simulées similaires à celles observées expérimentalement. Un autre paramètre, également très influent sur la forme du bain et difficilement mesurable, est le taux de soufre  $\tau_S$ . Ces quatre paramètres ( $\eta$ ,  $r_{th}$ ,  $r_{elec}$  et  $\tau_S$ ) vont donc contrôler directement la forme de la zone fondue. Pour mieux comprendre leur influence sur la forme du bain ainsi que leurs interactions, un plan d'expériences numériques a été réalisé.

### 2.9.1 Choix du plan et des facteurs

Afin de ne manquer d'aucune information et en supposant linéaire la réponse du système, un **plan factoriel complet**  $2^k$  (2 niveaux pour  $k = 4$  facteurs) est réalisé. L'avantage d'un tel plan est qu'en le complétant de quelques expériences supplémentaires, il devient un **plan composite centré** qui lui, permet d'obtenir une fonction quadratique. La définition des quatre **facteurs**  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  respectivement, le taux de soufre  $\tau_S$ , les deux écarts-types des sources thermique et électrique ( $r_{th}$  et  $r_{elec}$ ), et le rendement de l'arc  $\eta$  est présentée dans le tableau 2.7.

		+1	-1	0	
$\tau_S$	$x_1$	75	25	50	ppm
$r_{th}$	$x_2$	2	1,4	1,7	mm
$r_{elec}$	$x_3$	1,7	1,1	1,4	mm
$\eta$	$x_4$	90	50	70	%

Tableau 2.7 – Définition des facteurs étudiés

Les valeurs moyennes ainsi que les plages de variation sont établies en fonction des valeurs couramment rencontrées dans la littérature pour le soudage TIG, ainsi qu'en fonction de leur

gamme de variation et incertitudes.

### 2.9.2 Modèles mathématiques et description de la méthode

Rappelons qu'un plan d'expériences permet de décrire, par une relation simple ( $y$ ), le comportement d'un système en fonction des précédents facteurs ( $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$ ), de leurs effets ( $a_i$ ) ainsi que des interactions qu'ils engendrent ( $a_{i,j}$ ,  $a_{i,j,k}$  et  $a_{i,j,k,l}$ ).

Le modèle linéaire du plan factoriel complet  $2^4$  est défini par la relation 2.53.

$$y = a_0 + \sum_i^k a_i x_i + \sum_i^k \sum_{j=i+1}^k a_{i,j} x_i x_j + \sum_i^k \sum_{j=i+1}^k \sum_{l=j+1}^k a_{i,j,l} x_i x_j x_l + a_{1,2,3,4} x_1 x_2 x_3 x_4 \quad (2.53)$$

avec :  $a_0$ , la valeur moyenne (valeur au centre du domaine),  $e$ , les écarts subsistant entre les résultats de ce modèle simplifié et les réponses "mesurées". Cette relation est améliorée en 2.54 pour un plan composite centré.

$$y = a_0 + \sum_i^k a_i x_i + \sum_i^k \sum_{j=i+1}^k x_i x_j + \sum_i^k \sum_{j=i+1}^k \sum_{l=j+1}^k a_{i,j,l} x_i x_j x_l + a_{1,2,3,4} x_1 x_2 x_3 x_4 + \sum_i^k a_{i,i} x_i^2 + e \quad (2.54)$$

Il est à noter que ces équations (2.53 ou 2.54) existent pour chaque essai. Il en résulte donc un système d'équations de dimension égale au nombre d'essais (16 pour le cas linéaire et 25 pour le cas quadratique).

Une formulation matricielle (2.55), valable pour les deux modèles, peut ainsi être utilisée :

$$\vec{y} = \mathbf{X} \vec{a} \quad (2.55)$$

avec  $\vec{y}$  un vecteur contenant les réponses de chaque essai,  $\mathbf{X}$  une matrice ne contenant que des coefficients  $+1$ ,  $-1$ ,  $+\alpha$  et  $-\alpha$ , et  $\vec{a}$  le vecteur des effets. Ce dernier contient les inconnues à déterminer.

Le déroulement des essais et les résultats sont présentés dans le tableau 2.8. Dans ce dernier, seuls les essais numérotés de 1 à 16 (sans les interactions du second degré) sont nécessaires à la détermination du modèle linéaire et l'ensemble est utilisé pour le modèle quadratique. Les valeurs des facteurs :  $+\alpha$  et  $-\alpha$ , définissent les points supplémentaires, nécessaires à la construction du modèle du second degré. Dans cette étude, la variable centrée réduite  $\alpha$  est choisie égale à 1,414 de manière à satisfaire au critère de presque orthogonalité de la matrice  $\mathbf{X}$ . En d'autres termes, cela permet de concentrer les erreurs de prédictions ( $e$ ) sur les contours du domaine d'étude.

Les observables ou réponses sont :  $y^*$  la position du bain sur l'axe  $z$  et  $y^{**}$  son rayon en surface (les valeurs affichées sont en mm). Dans les deux cas, les mesures sont effectuées en millimètre pour un temps de 3 s.

Dans le tableau 2.55, la colonne  $x_0$  ne correspond pas à un facteur et n'est présente que pour la résolution des systèmes d'équations, notamment pour la détermination de la valeur moyenne  $a_0$ .

N°	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_1x_4$	$x_2x_3$	$x_2x_4$	$x_3x_4$	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$	$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$x_4^2$	$y^*$	$y^{**}$
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-2,51	4,14
2	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-0,82	2,65
3	+1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-2,80	4,06
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-0,92	2,64
5	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-3,69	4,03
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1,34	2,81
7	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-4	3,93
8	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1,58	2,77
9	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-1,63	4,93
10	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-0,73	2,89
11	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-2,5	4,78
12	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-0,77	2,99
13	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-2,42	4,87
14	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-0,99	3,25
15	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	-3,26	4,69
16	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1,29	3,22
17	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,66	3,96
18	+1	+ $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	-1,94	3,41
19	+1	- $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	0	0	-1,51	4,15
20	+1	0	+ $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	0	-1,23	3,82
21	+1	0	- $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	0	-2,19	3,96
22	+1	0	0	+ $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	-1,35	4
23	+1	0	0	- $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2$	0	-2,35	3,82
24	+1	0	0	0	+ $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2,86	4,91
25	+1	0	0	0	- $\alpha$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,73	2,48

Tableau 2.8 – Plan d’expériences et résultats

$x_1$	$\tau_S$	Taux de soufre		ppm
		$r_{th}$	Rayon de la distribution Gaussienne thermique	
$x_2$	$r_{elec}$	Rayon de la distribution Gaussienne électrique		mm
$x_3$	$\eta$	Rendement du procédé		%

Rappel :

$y^*$	Profondeur de pénétration du bain	mm
$y^{**}$	Largeur du bain	mm

Les résolutions des deux systèmes d'équations, respectivement pour le modèle linéaire et le modèle quadratique, la justification de la nécessité d'un modèle du second degré et la validation des effets observés sont présentés dans l'annexe A.

### 2.9.3 Analyse des effets

Les effets  $\vec{a}^*$  et  $\vec{a}^{**}$  des différents facteurs sur la profondeur de pénétration  $y^*$  et le rayon de la zone fondue  $y^{**}$  sont présentés respectivement sur les figures 2.17 et 2.18.

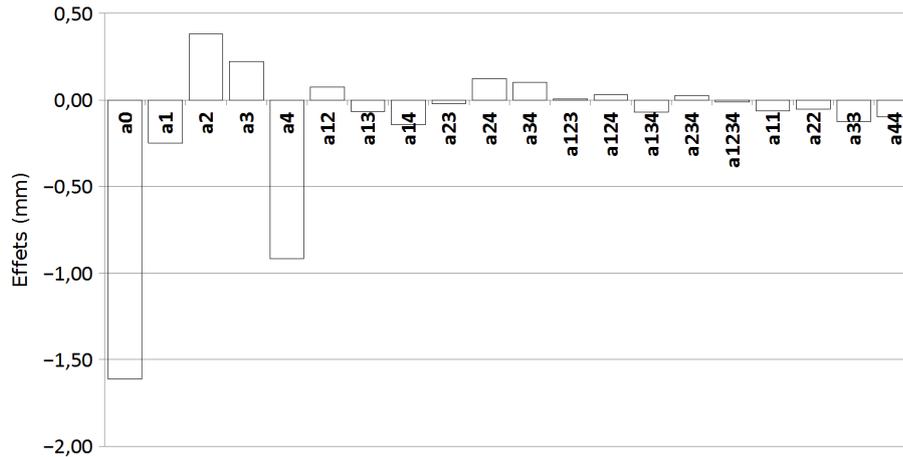


Figure 2.17 – Diagramme des effets pour la pénétration ( $y^*$ ) - modèle quadratique

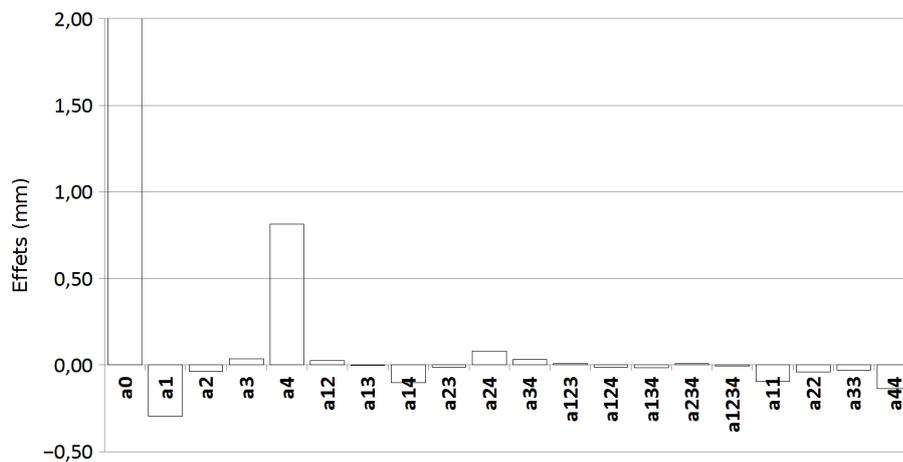


Figure 2.18 – Diagramme des effets pour le rayon ( $y^{**}$ ) - modèle quadratique

De manière générale, sur ces deux figures, il doit être noté que les effets des quatre facteurs sont bien prépondérants et que certaines des interactions présentent aussi des effets non négligeables.

Les valeurs de  $a_1$  des deux figures signifient qu'une variation de 50 ppm à 75 ppm de soufre, entraîne une augmentation de la profondeur de pénétration de 0,25 mm et une diminution de 0,3 mm de la largeur de bain.  $a_2$  indique qu'une augmentation de 0,3 mm sur le rayon de la

gaussienne thermique entraîne une diminution de  $0,38 \text{ mm}$  de la profondeur et de  $0,04 \text{ mm}$  du rayon de la zone fondue.  $a_3$  illustre qu'un élargissement de  $0,3 \text{ mm}$  de la distribution de la source électrique entraîne une diminution de  $0,22 \text{ mm}$  de la pénétration et une augmentation de rayon de  $0,037 \text{ mm}$ .  $a_4$  montre qu'une variation de rendement de  $0,7$  à  $0,9$  amène à un élargissement du bain de  $0,92 \text{ mm}$  sur l'axe  $z$  et de  $0,81 \text{ mm}$  sur l'axe  $r$ .

Ces observations indiquent que les incertitudes qui pèsent sur le taux de soufre et sur le rendement peuvent entraîner d'importantes erreurs sur les prédictions des dimensions du bain. En revanche, les sources des problèmes thermique et électromagnétique ont une influence plus faible. Cela amène à conclure que dans cette étude, les effets convectifs causés par la mécanique des fluides sont prépondérants sur la forme de la zone fondue. Par exemple, l'augmentation de la largeur de la source thermique devrait générer une augmentation de la largeur du bain, or ici, les écoulements résultant de l'effet Marangoni annulent cette logique.

De plus, les interactions sont relativement faibles. Il peut être remarqué que les interactions les plus importantes sont du premier ordre ( $a_{i,j}$ ) et sont celles faisant intervenir le rendement du procédé notamment avec le rayon  $r_{th}$  et le taux de soufre  $\tau_S$ . En effet, le rayon  $r_{th}$  et le rendement  $\eta$  apparaissent tous deux dans la source thermique, l'interaction de ces deux facteurs est donc assez évidente. Aussi, l'effet Marangoni est défini en fonction du taux de soufre et de la température. Les effets liés à l'un des deux facteurs et donc fonction de l'autre, d'où l'importance de l'interaction qui les lie.

Les interactions les plus faibles sont celles dans lesquels apparaissent le rayon de la source électromagnétique. En effet, si l'on comprend bien, par exemple, le lien entre une augmentation du taux de soufre et le rendement, il est aussi évident que  $r_{elec}$  et  $r_{th}$  ne vont pas interagir l'un sur l'autre ( $a_{23}$ ) et avoir une influence sur la forme de la zone fondue.

Les interactions d'ordre plus élevées sont faibles compte tenu de l'incertitude qu'il existe sur le modèle mathématique de ce plan.

#### 2.9.4 Bilan

Ce plan d'expériences ne nous permet pas d'isoler un facteur dont l'influence serait négligeable sur la forme de la zone fondue. Cependant, il amène à observer l'influence d'une mauvaise connaissance de certains facteurs. De plus, la forme réelle de la zone fondue expérimentale à  $3 \text{ s}$  est connue grâce aux macrographies d'essais préliminaires. Il est donc possible de déterminer une plage de variation (figure 2.19) des précédents facteurs validant les dimensions réelles du bain ( $z_{max} \approx -1,7 \text{ mm}$  et  $r_{max} \approx 4,3 \text{ mm}$ ). Pour ce faire, la figure 2.19 représente les courbes d'iso-niveaux des écarts entre les valeurs souhaitées et les valeurs modélisées. Dans ce cas, les facteurs  $x_2$  et  $x_3$  ( $r_{th}$  et  $r_{elec}$ ) sont fixés à leur niveau  $+1$  et seuls les facteurs  $x_1$  et  $x_4$  ( $\tau_S$  et  $\eta$ ) varient de leurs niveaux  $-1$  à  $+1$ .

La zone hachurée correspond aux valeurs de  $x_1$  et  $x_4$  pour lesquels les résultats des modèles  $y^*$

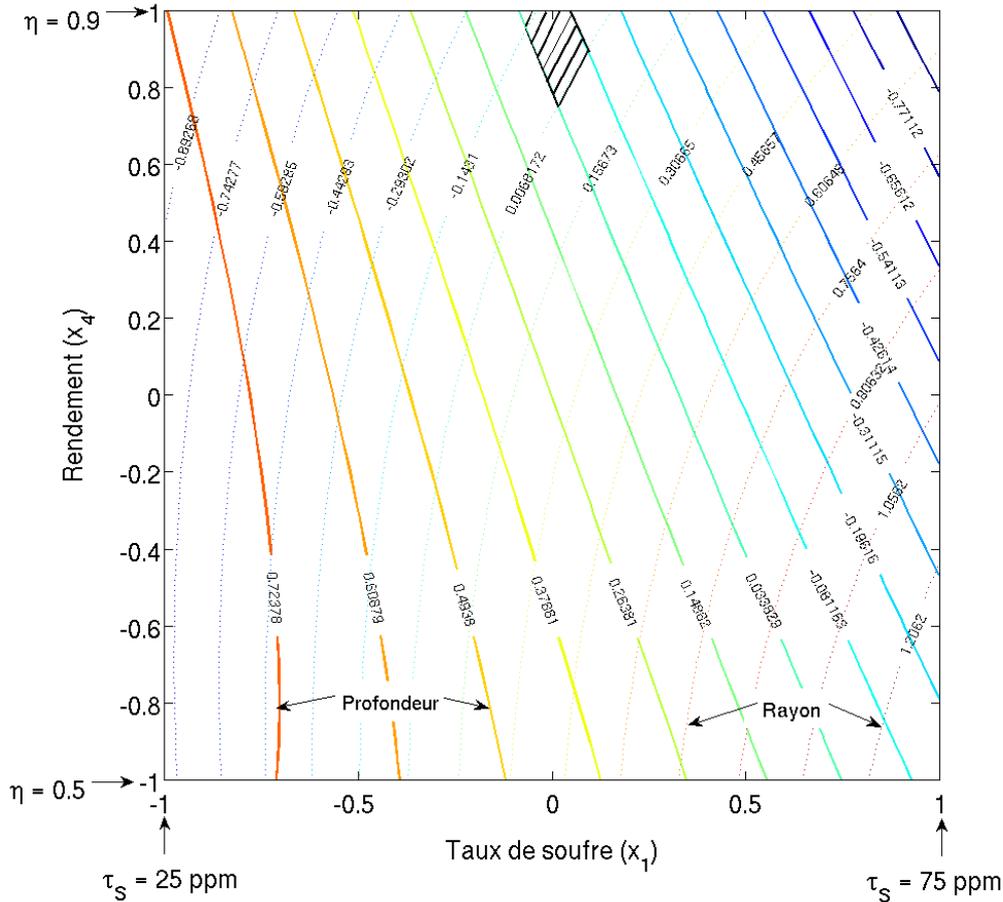


Figure 2.19 – Recherche de valeurs réalistes pour  $x_1$  et  $x_4$  (courbes d'iso-niveaux = mesure sur macrographie - résultats des modèles)

et  $y^{**}$  sont égaux aux observations expérimentales et donc correspondent à une même profondeur de pénétration et même largeur de bain. Cette zone est centrée sur  $x_1 \approx 0$  et  $x_4 \approx +1$ , ce qui signifie qu'un taux de soufre d'environ 50 ppm et un rendement proche de 0,9 sont cohérents avec la réalité pour une durée d'application du procédé de soudage durant 3 s.

Néanmoins, cette valeur de rendement peut sembler élevée au regard des données de la littérature. Il est cependant à noter que cette étude est réalisée sur une durée de 3 s, ce qui ne permet pas d'atteindre la forme stationnaire du bain. Les rendements n'étant pas connus durant la phase transitoire, il est probable que ce paramètre soit fonction du temps, notamment durant la phase d'allumage.

Connaissant maintenant les effets qu'ont certains paramètres de la simulation multiphysique sur la forme de la zone fondue, nous allons observer les conséquences de la prise en compte ou non de certains phénomènes physiques.

## 2.10 Influence des phénomènes physiques

La définition du modèle étant validée, une observation de l'influence de certains phénomènes physiques peut être réalisée. Pour ce faire, le modèle est "dégradé" étape par étape. Les phénomènes sont retirés les uns après les autres et les zones fondues, ainsi obtenues, sont confrontées à celle résultant du cas le plus complet (figure 2.20).

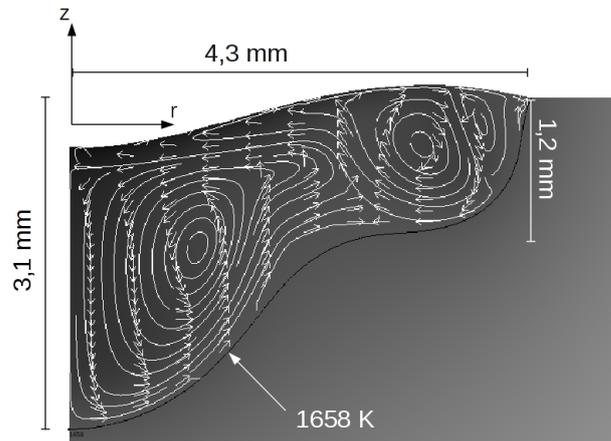


Figure 2.20 – Illustration de la simulation de référence

Les phénomènes considérés sont :

1. la déformation de la limite supérieure de la zone fondue,
2. la force de Lorentz dans le problème de mécanique des fluides,
3. la variation du paramètre  $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$  en fonction de la température,

Pour cette comparaison, les résultats considérés comme référence sont illustrés sur la figure 2.20. À cette étape, les paramètres de la simulation importent peu, ils sont cependant rappelés dans le tableau récapitulatif de l'annexe B.

1. Effet du déplacement de la frontière supérieure du bain fondu :

La figure 2.21 montre une comparaison des formes de bain fondu obtenu en prenant en compte ou non la déformation de la surface du métal liquide.

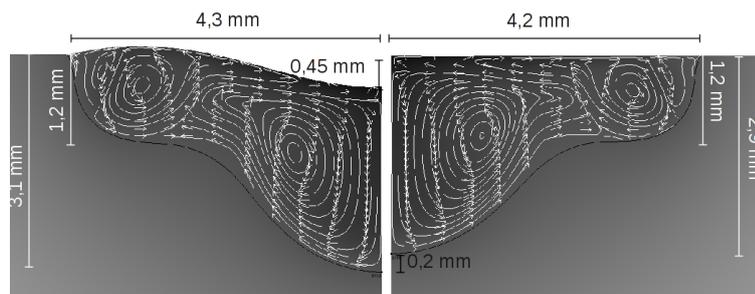


Figure 2.21 – Visualisation de l'effet du déplacement

De par la distribution de la pression de l'arc, le déplacement de la surface du bain entraîne une augmentation de la pénétration du bain fondu. En effet, au cours du temps, la déformation de la surface libre sous l'effet de la pression, permet d'apporter de l'énergie plus en profondeur. De légères modifications de l'écoulement apparaissent aussi sur la périphérie de la zone fondue. Dans cette zone, le volume de la cellule est plus important avec la déformation. Néanmoins, dans les deux cas, la hauteur locale du bain reste inchangée ( $\approx 1,2 \text{ mm}$ ). De ce fait, l'augmentation de la profondeur de pénétration maximale est inférieure au déplacement de la frontière, ce qui illustre l'intérêt d'un couplage temporel lors de la résolution du déplacement de la frontière et de la mécanique des fluides par rapport à un déplacement a posteriori.

Néanmoins, la forme générale de la zone fondue reste semblable dans les deux cas.

2. Effet de la force de Lorentz :

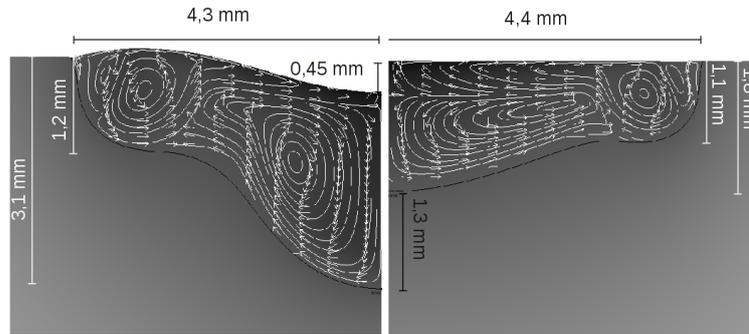


Figure 2.22 – Visualisation de l'effet de la force de Lorentz

La figure 2.22 permet d'observer l'influence de la force électromagnétique sur la forme finale du bain. Cette force volumique étant orientée de la surface vers la partie inférieure centrale ( $r = 0$ ) du bain, elle augmente la profondeur de pénétration et par conséquent, elle entraîne une diminution de la largeur de bain en surface. Malgré cet effet, la structure de l'écoulement, dans le bain liquide, reste similaire à celle obtenue dans le cas le plus complet. En effet, un rouleau de convection en périphérie et un autre près de l'axe, sont bien observés. Ce dernier résulte donc aussi de l'écoulement en surface généré par l'effet Marangoni et il est favorisé par les forces de Lorentz.

3. Effet de la dépendance de  $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$  à la température et au taux de soufre :

Pour cette résolution, l'effet Marangoni reste pris en compte mais la valeur de  $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$  est supposée constante ( $4.10^{-4} \text{ N.m}^{-1}.K^{-1}$ ).

Rappelons que pour ce modèle "dégradé", la surface libre est non déformée et les forces de Lorentz sont négligées. La zone fondue obtenue (figure 2.23) est très différente de la forme de référence. L'effet Marangoni est donc le principal moteur d'écoulement et ce dernier est

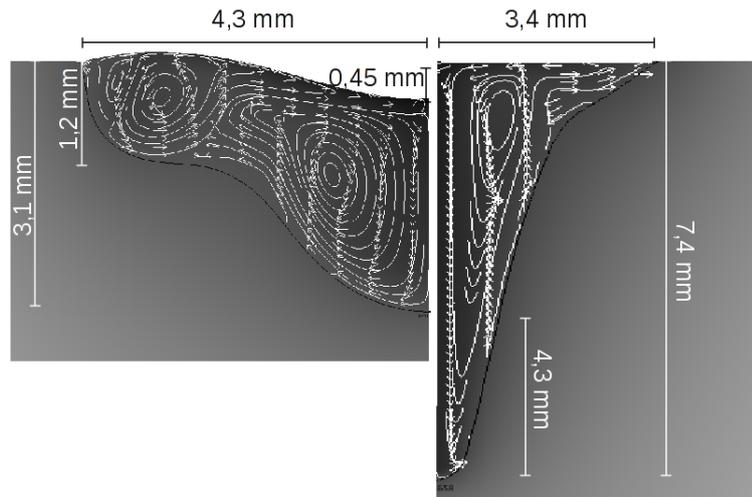


Figure 2.23 – Visualisation de l'influence de  $\frac{\partial\gamma}{\partial T} = f(T)$ .

altéré par la constance du terme  $\frac{\partial\gamma}{\partial T}$ . Ce paramètre conduit à un écoulement unidirectionnel en surface dirigé vers l'axe, ce qui entraîne ici, une pénétration du bain beaucoup trop importante pour une largeur trop faible. La structure de la géométrie de la zone fondue n'est plus du tout cohérente avec les précédentes observations. Ce dernier cas montre bien l'importance de considérer une loi de type Sahoo (variation en fonction de la température) pour prédire des formes de zones fondues cohérentes.

De ces différents essais, il en ressort que la déformation de la surface du bain n'influence pas que la profondeur de pénétration mais aussi la forme de la zone fondue dans son ensemble. Cependant, si la surface du bain est supposée plane, la forme générale de la zone fondue reste cohérente. Les forces de Lorentz, favorisent la pénétration du bain et impliquent une faible réduction de la largeur de la zone fondue. Dans notre étude, ce phénomène n'est pas négligeable. Pour finir, la prise en compte de la variation de la tension superficielle en fonction de la température est responsable de la forme caractéristique de notre zone fondue (les trois cellules).

## 2.11 Conclusion du chapitre 2

Dans ce chapitre, nous avons défini une modélisation multiphysique d'une pièce subissant un soudage TIG statique. Un effort particulier a été porté sur le choix des propriétés thermophysiques ainsi que sur les paramètres purement numériques du modèle, comme ceux intervenant dans la prise en compte de la chaleur latente ou ceux de la condition de Darcy. L'accent a aussi été porté sur le choix du maillage qui doit être particulièrement raffiné en raison du schéma d'écoulement spécifique constitué de trois cellules convectives. Après avoir justifié les différents choix retenus pour le modèle multiphysique, une étude construite comme un plan d'expériences a été réalisée pour observer les effets de certains paramètres du modèle estimés d'après la littérature. L'influence de la prise en compte de certains phénomènes physiques est ensuite mise en valeur à travers une étude comparative sur les formes de zones fondues.

Les résultats observés nous amènent à définir les éléments clés de la bonne réalisation d'une telle simulation. Nous avons observé que les phénomènes liés à la mécanique des fluides étaient responsables de la forme caractéristique de la zone fondue. En effet, pour le matériau considéré, l'acier inoxydable AISI 316L(N), la variation de tension superficielle en fonction de la température et du taux d'éléments tensio-actifs, est à l'origine de deux cellules d'écoulement. L'une se situe au centre de la zone fondue et l'autre est sur la périphérie. De même, la prise en compte de la force électromagnétique, entraîne une augmentation de la profondeur de pénétration du bain liquide non négligeable. En revanche, la déformation de la surface libre du bain fondu, bien que non négligeable, n'implique pas de modification structurelle de la forme de la zone fondue. Ces conclusions sont bien cohérentes avec les observations bibliographiques.

La précision d'un tel modèle demande une bonne connaissance de l'ensemble des paramètres qui le compose. Or, certains de ces paramètres sont encore mal connus, car difficilement mesurables avec précision. Les effets des incertitudes inhérentes à certains paramètres de la simulation ont été observés par l'intermédiaire d'un plan d'expériences numériques. Dans cette analyse, le taux de soufre, les paramètres de distribution des sources thermique et électromagnétique et le rendement thermique du procédé ont été considérés comme soumis aux plus fortes incertitudes. Ces derniers ayant été estimés à partir de données issues de la littérature. Les résultats observés, indiquent l'importance de la mécanique des fluides, et plus particulièrement de l'effet Marangoni, sur la forme de la zone fondue. En effet, les concentrations d'éléments tensio-actifs (soufre, phosphore, ...) étant assez mal maîtrisées, les forces de thermocapillarité peuvent mener à d'importantes erreurs sur les dimensions du bain. De plus, malgré la nécessité de la représentation de la force électromagnétique, une incertitude sur le paramètre définissant la distribution de densité de courant électrique est faiblement significative sur la forme de la zone fondue. De la même manière, l'effet d'une mauvaise maîtrise de la distribution de la source thermique est d'un ordre secondaire. Le rendement thermique a une influence plus directe sur l'allure de la zone fondue.

Le plan d'expériences a également permis d'identifier le taux de soufre et le rendement permettant de reproduire au mieux la largeur et profondeur de pénétration du bain obtenues expérimentalement au bout de 3 s. La valeur obtenue pour le taux de soufre est cohérente avec nos suppositions initiales. En revanche, le rendement semble plus élevé que les valeurs observées dans la littérature pour une durée de trois secondes. Il est cependant probable que, durant les premiers instants, le rendement évolue au cours du temps, notamment compte tenu de la remontée de l'électrode pour l'amorçage de l'arc ou de la croissance rapide de la largeur de bain.



# Chapitre 3

## PROBLÈME INVERSE THÉORIQUE

### Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b>	<b>91</b>
<b>3.2 Modélisation de la phase solide</b>	<b>92</b>
3.2.1 Cahier des charges	92
3.2.2 Mise en œuvre de la simulation 2D	92
3.2.3 Validation de la simulation de la phase solide	96
<b>3.3 Écriture du problème inverse</b>	<b>102</b>
3.3.1 Présentation - méthode du gradient conjugué	102
3.3.2 Choix de la fonction "objectif"	104
3.3.3 Fonctionnelle de Lagrange	105
3.3.4 Problème en variation ou problème de sensibilité	106
3.3.5 Fonctionnelle de Lagrange en variation	110
3.3.6 Critère d'arrêt	116
3.3.7 Algorithme	117
<b>3.4 Application et résultats</b>	<b>117</b>
3.4.1 Définition du problème	118
3.4.2 Résultats	120
<b>3.5 Conclusion du Chapitre 3</b>	<b>124</b>

---

### 3.1 Introduction

La deuxième approche que nous avons développée pour aborder le soudage TIG utilise les méthodes inverses. En effet, les paramètres physiques des modèles sont mal connus au delà de la température de fusion. Ce constat nous a conduit à envisager une nouvelle approche consistant à ne modéliser que la zone solide. Il est alors nécessaire de simuler l'évolution temporelle de l'interface liquide - solide dont la température est supposée connue. Cette démarche permet de limiter les phénomènes physiques à modéliser, réduisant ainsi la complexité du problème à traiter.

De plus, dans notre étude, l'influence des premiers instants est particulièrement importante en raison de l'allumage de l'arc par "contact - retrait" qui nécessite une remontée de l'électrode

durant les premiers instants. L'aspect fortement transitoire fait intervenir des notions difficiles à représenter numériquement. Par exemple, lors de la création de l'arc et l'établissement du plasma, la distribution d'énergie est amenée de façon instationnaire. Ces phénomènes ne sont actuellement pas pris en compte dans l'approche multiphysique.

Par ailleurs, la modélisation multiphysique se heurte également au problème de validation des résultats, en particulier au niveau de l'arc et du bain, zones dans lesquelles la mesure directe (vitesse, température) y sont difficiles.

Par conséquent, le travail présenté dans ce chapitre traite de l'estimation de l'évolution temporelle de l'interface liquide - solide à travers quatre étapes. Premièrement, une méthode de simulation de la phase solide est présentée et validée par comparaison avec une simulation multiphysique. Deuxièmement, la méthodologie utilisant l'algorithme de régularisation itérative pour l'estimation de l'évolution de l'interface est mise en place. Troisièmement, le problème inverse est résolu de manière purement théorique. Finalement, l'accent est mis sur les difficultés ainsi que sur les méthodes utilisées pour les surmonter.

## 3.2 Modélisation de la phase solide

L'écriture du problème inverse nécessite le développement d'un problème direct pour lequel la simulation multiphysique ne peut pas être utilisée, car trop longue à résoudre en raison des couplages plus complexes. Une simulation de la phase solide uniquement est donc mise en place. Elle doit permettre d'obtenir un champ de température équivalent à celui issu du problème multiphysique.

### 3.2.1 Cahier des charges

Cette modélisation est construite de façon à répondre à un certain nombre de critères :

- la position de l'interface doit être une donnée d'entrée,
- la température de la frontière doit pouvoir être imposée ( $T_{fusion} = T_{solidus}$ ),
- la partie liquide n'est pas représentée,
- les temps de résolution doivent être relativement courts,
- l'implémentation doit être faite sous COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>.

### 3.2.2 Mise en œuvre de la simulation 2D

Au regard du précédent cahier des charges, l'utilisation de la méthode ALE couplée à un problème purement thermique est la solution la plus appropriée vis à vis du logiciel COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>. De plus, elle permet une écriture du problème inverse plus "classique" à partir de l'équation de la chaleur.

La création de cette modélisation simplifiée repose sur plusieurs hypothèses :

- Comme dans la simulation mutliphysique, le système est supposé axisymétrique.

### 3.2 Modélisation de la phase solide

- Seuls les transferts dans la phase purement solide sont simulés, i.e. le système représenté est délimité par l'isotherme de solidus. Il s'agit donc d'un problème de Stefan à une phase.
- La chaleur latente de fusion, générée entre les températures de liquidus et de solidus, n'est pas incluse dans la représentation actuelle par non traitement de la zone pâteuse.
- Le déplacement de la frontière est imposé uniquement dans la direction verticale, il sera noté pour la suite  $\sigma(r, t)$ .
- Les propriétés thermophysiques sont considérées dépendantes de la température.
- Les pertes par rayonnement sont linéarisées (pour faciliter le futur développement du problème inverse).

#### 3.2.2.1 Gestion du déplacement

Cette simulation a pour objectif d'être couplée à un problème inverse. La position de la frontière mobile, qui est l'inconnue du problème inverse est donc conditionnée pour réduire au maximum le nombre de fonctions à estimer. La position de l'interface doit donc être une donnée modifiable du problème direct. Pour ce faire, elle est importée dans COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> sous la forme d'un fichier texte, cela, afin d'être modifiée lors de la future procédure d'identification de la fonction  $\sigma(r, t)$ .

#### 3.2.2.2 Géométrie

La géométrie globale de la pièce est identique à celle définie dans le cas de la simulation multiphysique, il s'agit d'une section d'un disque de 8 cm de diamètre et de 1 cm d'épaisseur (chapitre 2).

La figure 3.1, représente schématiquement une coupe de la pièce, sur laquelle sont identifiées les frontières :  $\Gamma_0(t)$  représentant l'interface liquide/solide,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  respectivement les limites supérieure, latérale et inférieure de la pièce et  $\Gamma_4$  l'axe de symétrie. La fonction  $\sigma(r, t)$  correspond aux coordonnées sur l'axe z de la frontière  $\Gamma_0(t)$  au cours de son déplacement.

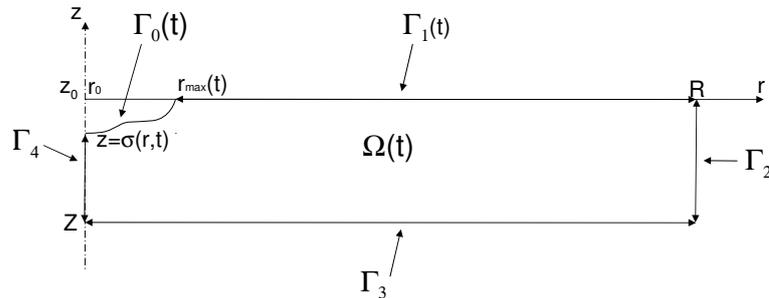


Figure 3.1 – Géométrie à un instant t

#### 3.2.2.3 Système d'équations en température

Dans le domaine  $\Omega(t)$ , le champ de température est obtenu par la résolution de l'équation de la chaleur dont l'expression classique en 2D axisymétrique est présentée par l'équation (3.1) :

$$\text{dans } \Omega(t) \quad \rho(T)c_p(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (3.1)$$

Avec comme conditions aux limites :

$$\text{sur } \Gamma_0(t) \quad T(r, \sigma, t) = T_f \quad (3.2)$$

$$\text{sur } \Gamma_1(t) \quad -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z} = -S(r) + h_{cv}(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{p,\infty}^4) \quad (3.3)$$

$$\text{sur } \Gamma_2 \quad -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} = h_{cv}(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{p,\infty}^4) \quad (3.4)$$

$$\text{sur } \Gamma_3 \quad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z} = h_{cv}(T - T_\infty) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_{p,\infty}^4) \quad (3.5)$$

$$\text{sur } \Gamma_4 \quad \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{à } t = 0 \quad T(r, z, t = 0) = T_\infty \quad (3.7)$$

L'équation (3.2) est une condition de température imposée, car la frontière  $\Gamma_0(t)$  représente l'interface liquide - solide dont le déplacement est réalisé par la méthode ALE. Les autres conditions aux limites (équations : (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6)) sont des pertes par convection et rayonnement. Le terme source  $S(r)$  de l'expression (3.3) est une portion de gaussienne se réduisant par le centre au fur et à mesure qu'augmente  $\Gamma_0(t)$ . Elle représente l'apport d'énergie issue de l'arc et du plasma appliquée sur la partie solide. Son intérêt consiste à réduire la discontinuité de température lors de l'apparition de la zone fondue à  $T_f$  dans une pièce initialement à  $T_\infty$ .

La résolution de ce système d'équations dans le cadre du soudage entraîne l'apparition de gradients de température très importants (environ  $500000 \text{ K.m}^{-1}$ ). Or, afin de garantir une bonne précision des résultats numériques, le maillage doit être raffiné dans les zones de forts gradients, augmentant ainsi les temps de calcul. Afin de limiter cet effet, une adimensionnalisation de la température est réalisée. Précisons que les variables d'espace ( $r, z$ ) et de temps ne sont pas adimensionnées dans notre étude.

### 3.2.2.4 Adimensionnalisation des températures

La variable sans dimension est notée  $\theta$ , et est exprimée par l'équation (3.8).

$$\theta(r, z, t) = \frac{T(r, z, t) - T_f}{T_f - T_\infty} \quad (3.8)$$

Donc,

$$T(r, z, t) = \theta(r, z, t)(T_f - T_\infty) + T_f \quad (3.9)$$

Ce qui entraîne :

$$\theta(r, z, t) \begin{cases} = -1 \text{ à l'infini} \\ < 0 \text{ dans le solide} \\ = 0 \text{ sur l'interface} \\ > 0 \text{ dans le liquide} \end{cases}$$

Donc, ne représentant que le solide, il est possible de dire que la variable  $\theta(r, z, t)$  sera comprise entre 0 et -1. De plus, les gradients de cette variable seront d'un ordre de grandeur moins contraignant (environ  $500 \text{ m}^{-1}$ ).

En modifiant l'amplitude de la variable calculée, le critère de convergence prédéfini, dans le logiciel, doit être modifié. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

La transformation du système d'équations (3.1) à (3.7) se fait en y insérant (3.9) :

$$\rho(T)c_p(T)\frac{\partial(\theta(r, z, t)(T_f - T_{inf}) + T_f)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)r\frac{\partial(\theta(r, z, t)(T_f - T_{inf}) + T_f)}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial(\theta(r, z, t)(T_f - T_{inf}) + T_f)}{\partial z}\right) \quad (3.10)$$

Les dérivées de la température de fusion sont nulles et l'écart de température sort des dérivations, ce qui donne :

$$(T_f - T_{inf})\rho(T)c_p(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial t} = (T_f - T_{inf})\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)r\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial r}\right) + (T_f - T_{inf})\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial z}\right) \quad (3.11)$$

Et, après simplification,

$$\boxed{\rho(T)c_p(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)r\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial z}\right)} \quad (3.12)$$

Étant donné que la relation de transformation (3.8) est linéaire, les propriétés thermophysiques de l'expression (3.17) peuvent indifféremment être exprimées en fonction de la température avec ou sans dimension ( $T$  ou  $\theta$ ).

Pour les conditions aux limites, le développement est identique.

Par exemple, pour  $\Gamma_1(t)$  :

En linéarisant les pertes par rayonnement,

$$\varepsilon\sigma(T^4 - T_\infty^4) \equiv 4\varepsilon\sigma T_{moy}^3(T - T_\infty) = h_{ray}(T - T_\infty) \quad (3.13)$$

avec  $T_{moy} = \frac{T_f + T_\infty}{2}$

En posant,

$$h_{tot} = h_{cv} + h_{ray} \quad (3.14)$$

$$-(T_f - T_\infty)\lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial z} = -S(r) + h_{tot}((\theta(r, z, t)(T_f - T_\infty) + T_f) - T_\infty) \quad (3.15)$$

Soit,

$$\boxed{-\lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial z} = -\frac{S(r)}{(T_f - T_{inf})} + h_{tot}((\theta(r, z, t) + 1))} \quad (3.16)$$

Le système d'équations devient donc :

$$\text{dans } \Omega(t) \quad \rho(T)c_p(T)\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad (3.17)$$

$$\text{sur } \Gamma_0(t) \quad \theta(r, \sigma, t) = 0 \quad (3.18)$$

$$\text{sur } \Gamma_1(t) \quad -\lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial z} = \frac{-S(r)}{(T_f - T_\infty)} + h_{tot}((\theta(r, z, t) + 1)) \quad (3.19)$$

$$\text{sur } \Gamma_2 \quad -\lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial r} = h_{tot}((\theta(r, z, t) + 1)) \quad (3.20)$$

$$\text{sur } \Gamma_3 \quad \lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial z} = h_{tot}((\theta(r, z, t) + 1)) \quad (3.21)$$

$$\text{sur } \Gamma_4 \quad \lambda(T)\frac{\partial\theta(r, z, t)}{\partial r} = 0 \quad (3.22)$$

$$\text{à } t = 0 \quad \theta(r, z, t) = -1 \quad (3.23)$$

Ce système est celui retenu pour la formulation du reste de l'étude.

### 3.2.3 Validation de la simulation de la phase solide

#### 3.2.3.1 Principe de la simulation

L'objectif de cette partie est de montrer l'équivalence entre l'approche qui ne considère que les transferts de chaleur dans la phase solide, et une approche plus multiphysique, qui inclut les deux phases liquide et solide. Ainsi, deux simulations axisymétriques sont effectuées. L'une, servant de référence, tient compte des transferts de chaleur, de la mécanique des fluides et de l'électromagnétisme (cf. modèle détaillé au chapitre 2), l'autre n'est constitué que d'un problème thermique et applique la simplification précédemment décrite. Il s'agira de montrer ici que les champs de température prédits par le modèle diffusif coïncident bien avec ceux déduits d'une modélisation incluant les différents phénomènes présents dans la phase liquide. Autrement dit, qu'imposer l'évolution de l'isotherme de fusion permet de retrouver dans la phase solide les mêmes champs thermiques que ceux calculés à l'aide de la modélisation complète de l'anode.

La durée de soudage représentée dans ces deux cas est de 3 s car elle contient les aspects transitoires les plus contraignants. Ces aspects, ainsi que les couplages entre les différents phénomènes physiques entraînent une durée de résolution d'environ 48 h pour le cas multiphysique contre 10 min pour le cas purement diffusif. La comparaison des deux méthodes est effectuée sur deux

critères, une validation spatiale et une validation temporelle.

Les positions de l'interface sont supposées connues et sont extraites de la simulation multiphysique.

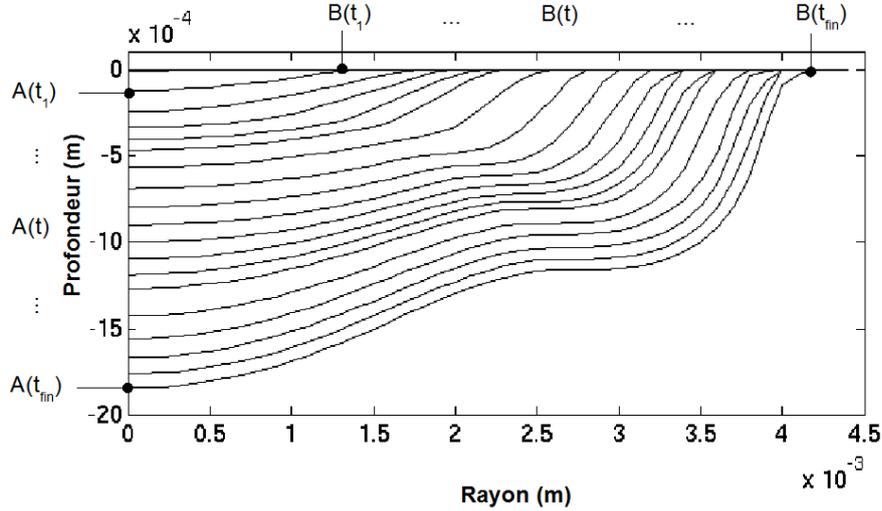


Figure 3.2 – Positions de l'isotherme  $\theta = 0$

La figure 3.2 présente la limite de la zone fondue à différents instants. Les points A et B correspondent respectivement à la pénétration et à la demi-largeur du bain. Les coordonnées spatiales observées sur ces courbes sont donc introduites dans la simulation de la phase solide en tant que déplacement de la zone fondue.

#### 3.2.3.2 Mise en données sous COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>

La mise en forme numérique du système théorique composé des équations 3.17 à 3.23 demande, pour certaines, d'être modifiées ou approchées. Aussi, la géométrie est construite de manière à assurer le déplacement du front.

Sur la figure 3.3, les points A et B coïncident à l'instant initial lorsque le bain liquide n'est pas encore présent. Lors du développement de la phase liquide, le point A va se déplacer le long de l'axe z, imposant ainsi le déplacement du front en  $r = 0$ . Il est associé au nœud du maillage positionné initialement à l'origine du repère. Par contre, le point B n'est pas associé à un nœud particulier du maillage, il est repéré par l'isotherme de solidus, sa position est donc une fonction du temps. Ainsi, tous les nœuds à la surface du domaine vont éventuellement subir un déplacement selon l'axe z en fonction de la valeur de  $\sigma(r, t)$ .

La relation entre les indices de la figure 3.3 et la précédente dénomination des conditions aux limites sur la figure 3.1 est présentée dans le tableau 3.1 :

En pratique, la frontière supérieure du domaine est initialement scindée en deux parties [AC] et [CD] (figure 3.3). Seule la partie [AC] est concernée par le déplacement. Se pose alors le

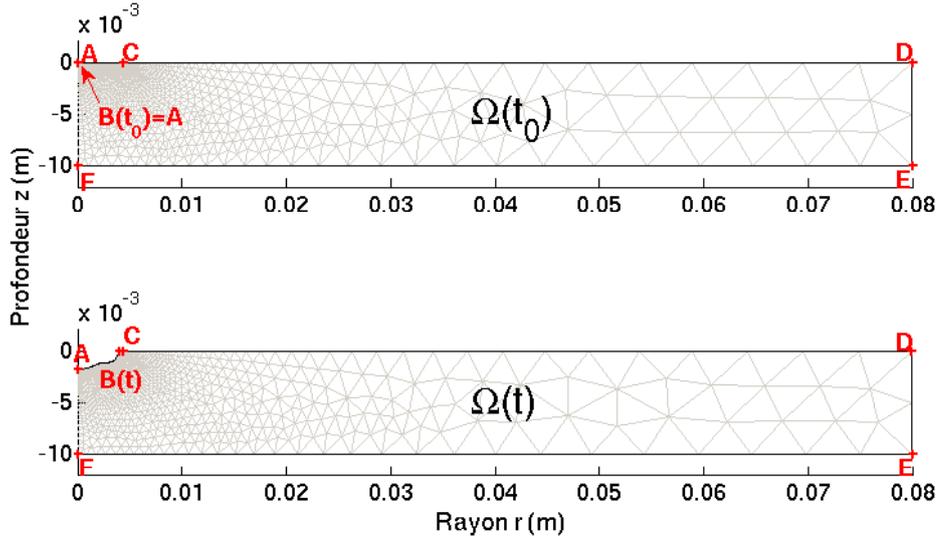


Figure 3.3 – Géométrie et maillage pour la résolution

Figure 3.1	$\Gamma_0$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_4$
Figure 3.3	[AB]	[BC]∪[CD]	[DE]	[EF]	[FA]

Tableau 3.1 – Correspondance entre les dénominations théorique (figure 3.1) et pratique (figure 3.3)

problème de la condition thermique sur la limite de cette frontière. En effet, pour les premiers instants, il convient d'imposer une condition de type Fourier (équation 3.19). Dès que la phase liquide apparaît, la partie délimitée par A et B doit être soumise à une condition de type Dirichlet (équation 3.18), tandis que la condition de Fourier doit continuer à être appliquée sur l'autre partie ([BC]).

Sous COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>, le type de condition sur une limite ne peut être modifiée au cours du temps de manière simple. Nous avons alors appliqué, sur l'ensemble de la frontière, une condition de type Fourier (équation 3.24) mais dans laquelle un coefficient d'échange équivalent  $h_{eq}$  et une température associée  $\theta_{eq}$  sont utilisés pour reproduire une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_0$  représentant le front de fusion. Il suffit pour cela de choisir une valeur de  $h_{eq}$  très grande et d'imposer  $\theta_{eq}$  à la température souhaitée (ici :  $\theta_{eq} = 0$ ).

$$\lambda(\theta) \frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial n} = h_{eq}(\theta - \theta_{eq}) \quad (3.24)$$

avec :

$$h_{eq} \begin{cases} = +\infty & \text{si } z < -1.10^{-5} \text{ m} \\ = h_{tot} & \text{si } z \geq -1.10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$

$$\theta_{eq} \begin{cases} = 0 & \text{si } z < -1.10^{-5} \text{ m} \\ = -1 & \text{si } z \geq -1.10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$

La transition est effectuée en fonction de la profondeur de la zone fondue (figure 3.4). De ce fait, il s'agit directement d'une conséquence du déplacement de l'interface. La définition du seuil sur l'axe  $z$  (ici  $1.10^{-5} \text{ m}$ ) est faite de façon arbitraire. Cependant, sur cette portion de zone fondue, la forme de la frontière tend à être verticale et donc un seuil plus faible n'a pas d'influence.

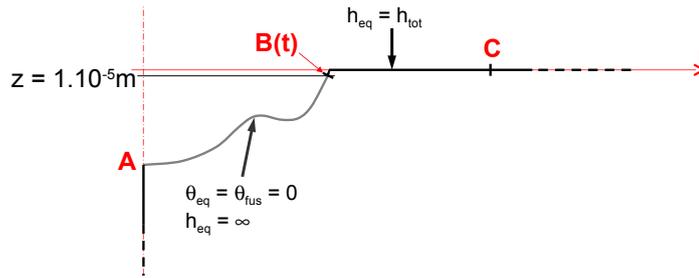


Figure 3.4 – Schéma de la transition entre  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$

Notons que ce type de transition de conditions aux limites : Dirichlet - Fourier, entraîne une singularité numérique. Sur la zone de contact entre ces deux conditions, un flux ponctuel apparaît. L'amplitude de ce pic est liée à la finesse du maillage, i.e. plus le maillage est fin, plus le flux tend vers l'infini. Pour réduire cet effet, une solution présentée par exemple dans [14], consiste à travailler avec des éléments linéaires et de diagonaliser la matrice de masse. Le logiciel utilisé ne permettant pas de diagonaliser cette matrice, seule l'interpolation dans les éléments est modifiée. En effet, par défaut, des éléments quadratiques sont utilisés dans les problèmes thermiques.

**Le maillage** présenté sur la figure 3.3 est construit de la manière suivante :

- sur la frontière [AC], la longueur maximale des mailles est de  $50 \mu\text{m}$ ,
- dans le domaine  $\Omega$ , il se développe en partant de la frontière précédente avec un facteur d'expansion de 1,1.

Ce qui produit un total d'environ 20000 degrés de liberté, les inconnues du problème ALE étant incluses.

La frontière mobile, représentant l'interface liquide - solide, subit un déplacement de grande dimension compte tenu de l'épaisseur de la pièce et cela en un temps assez court. Même si la méthode ALE, pré-implémentée sous COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>, gère le mouvement des éléments en optimisant la qualité du maillage, cette dernière finit par se détériorer, perturbant la résolution ainsi que la solution obtenue. De ce fait, la solution peut être l'utilisation d'un pas de temps très faible ou la mise en place d'un remaillage, solution que nous avons retenue. Cette dernière permet d'éviter des durées de résolution trop importantes.

### 3.2.3.3 Résultats de la validation

La simulation à valider est composée d'une géométrie bidimensionnelle axisymétrique et les phénomènes physiques représentés sont transitoires. De ce fait, la validation doit être menée dans ces deux directions, c'est-à-dire, à la fois sur le temps et sur l'espace.

La **validation spatiale** est une comparaison des champs de température obtenus par la simulation multiphysique et par la simulation purement conductive. Elle est effectuée à l'instant final (ici 3 s) car c'est à ce moment que l'erreur est maximale (figure 3.7).

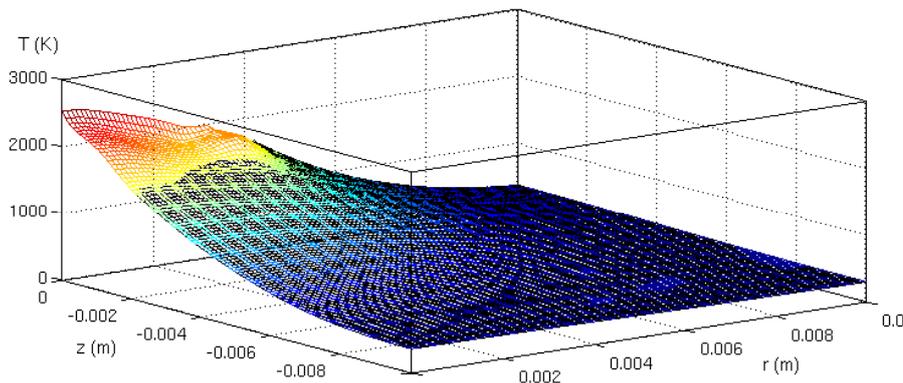


Figure 3.5 – Champs de température calculés par les approches "phase solide" (noir) et multiphysique (couleur)

La figure 3.5 présente la superposition des deux résultats. Les données issues de la simulation "simplifiée" (en noir) sont, par définition, celles n'existant que dans le solide. Afin d'éclaircir le graphique, les axes sont réduits, seuls les premiers centimètres sont affichés ici ( $0 < r < 0.01 \text{ m}$  et  $-0.01 \text{ m} < z < 0$ ). Néanmoins, la géométrie simulée reste celle présentée par la figure 3.1.

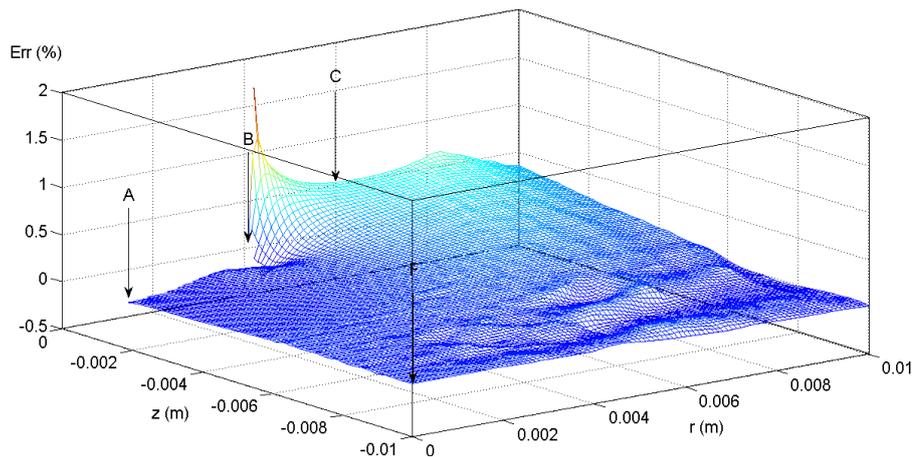


Figure 3.6 – Variation spatiale de l'erreur relative  $\frac{T_{ref}-T}{T_{ref}}$  à  $t = 3 \text{ s}$  avec  $T_{ref}$  et  $T$  provenant respectivement des simulations multiphysique et purement conductive

La figure 3.5 illustre la cohérence des températures obtenues par le modèle simplifié. Cependant, la figure 3.6 présente de façon surfacique l'écart relatif entre les solutions. L'erreur commise est, majoritairement, inférieure à 0,5% sur le premier centimètre de la géométrie et tend vers

zéro en  $r = 0,01 \text{ m}$ . Le maximum, inférieur à 2%, est atteint en surface à proximité du point B où la modification de condition sur la limite se produit. La valeur de l'erreur reste importante à proximité de l'interface, lorsque le flux de chaleur est maximal.

La **validation temporelle** est une observation de l'évolution de température sur 45 points distribués de manière homogène autour de la zone fondue. Ces points sont éloignés d'une distance de  $0,5 \text{ mm}$  de la frontière alors que les mesures nécessaires à la résolution du problème inverse le sont d'environ  $1,5 \text{ mm}$ . Étant donnée que l'erreur est maximale à proximité de la zone fondue (figure 3.6), cela permet d'observer une erreur maximisée.

La figure 3.7 représente les évolutions de température ainsi que les erreurs relatives sur deux points de mesure extrêmes. Le premier est situé en surface de la pièce ( $r = 0,0048 \text{ m}$  et  $z = 0$ ) et le second sur l'axe de symétrie ( $r = 0 \text{ m}$  et  $z = -0,0022 \text{ m}$ ) en dessous de la zone fondue.

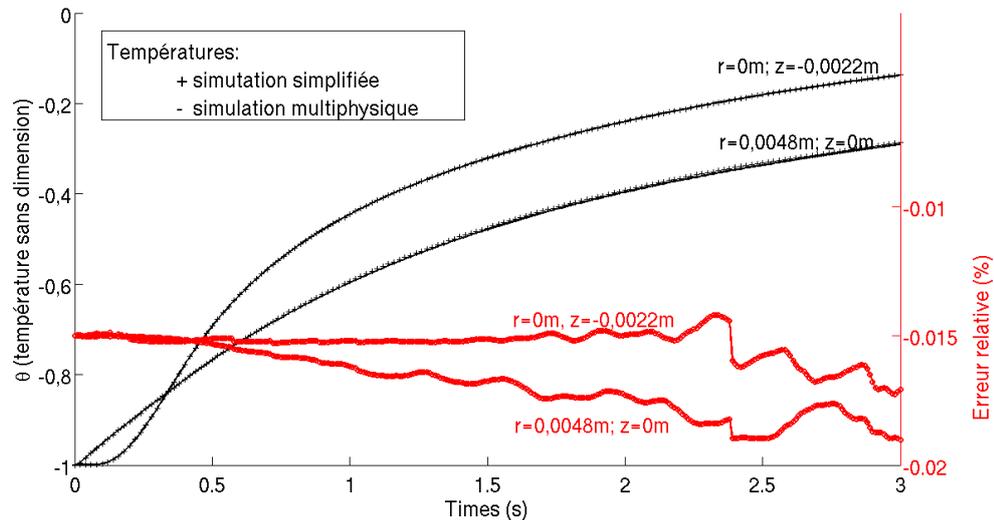


Figure 3.7 – Validation temporelle du champ de température

Notons que le point de mesure en surface présente l'erreur la plus importante ( $\approx 0,015\%$ ).

#### 3.2.3.4 Bilan

La singularité présente au point B entraîne une erreur d'environ 2% sur les températures simulées. Cependant, dans la zone de mesure du problème inverse, l'erreur est satisfaisante ( $< 0,5\%$ ). Dans les deux simulations, les discrétisations spatiales ne peuvent être identiques à cause du déplacement imposé et du remaillage dans la simulation de la phase solide. Et même si dans les deux cas les maillages sont établis de façon à ne pas perturber les solutions calculées, il subsiste une source de différence entre les deux résultats. Les niveaux des écarts observés valident donc l'utilisation d'un domaine d'étude simplifié à la partie solide.

Cette méthode de simulation est donc appliquée pour l'écriture du problème inverse. Ce dernier est basé sur la méthode du gradient conjugué pour laquelle l'estimé est la position de l'interface à chaque instant. Elle vise à minimiser un écart quadratique construit sur les températures mesurées et simulées. Par conséquent, trois problèmes sont à définir :

- un problème direct,
- un problème en sensibilité (variation),
- un problème adjoint.

### 3.3 Écriture du problème inverse

#### 3.3.1 Présentation - méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est issue de la famille des méthodes de descente. La fonction "objectif", ou "coût", est ici un critère quadratique construit sur la différence de température qui existe entre des valeurs extraites d'une simulation et des valeurs mesurées expérimentalement. La résolution du problème direct ainsi que des données expérimentales sont donc nécessaires au calcul de ce critère.

$$J(\sigma) = \sum_{n=1}^{Nc} \left( \int_0^{t_{fin}} [T(r_n, z_n, t; \sigma) - Y_n(t)]^2 dt \right) \quad (3.25)$$

Avec :  $\sigma$  : les composantes sur l'axe  $z$  des coordonnées de l'interface,  $Nc$  : le nombre total de capteurs de température,  $T$  : la température simulée (aux coordonnées  $r_n$  et  $z_n$ ),  $Y_n$  : la température mesurée (aux coordonnées  $r_n$  et  $z_n$ ).

Le principe de recherche de la fonction estimée est le suivant :

Soit  $\sigma^k(r, t)$  la position de l'interface en fonction de  $z$  à l'itération  $k$ , la valeur à l'itération  $k + 1$  est déterminée par la relation itérative (3.26) :

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \gamma^k d^k \quad (3.26)$$

L'expression (3.26) fait apparaître deux termes,  $\gamma^k$  et  $d^k$ , dont le produit permet de corriger l'estimé et donc de faire progresser l'identification. Le paramètre  $\gamma^k$  est le "pas de descente". C'est un scalaire dont la valeur peut être définie de façon arbitraire, évolutive (au cours des itérations) ou optimale. La méthode optimale vise à calculer la valeur de  $\gamma^k$  en minimisant la fonction  $f(\gamma^k)$  qui se définit en dérivant (3.25) par rapport à  $\gamma^k$ .

$$J(\sigma + \gamma d) = \int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} \left( [T(r_n, z_n, t; \sigma + \gamma d) - Y_n(t)]^2 \right) dt \quad (3.27)$$

La minimisation mono-dimensionnelle de  $J(\sigma^k + \gamma^k d^k)$  est obtenue pour (3.28).

$$\frac{dJ(\sigma^k + \gamma^k d^k)}{d\gamma^k} = 0 \quad (3.28)$$

L'expression analytique du pas de descente est donc :

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} (T(r_n, z_n, t; \sigma) - Y_n(t)) \delta T(r_n, z_n, t; \sigma) dt}{\int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} (\delta T(r_n, z_n, t; \sigma))^2 dt} \quad (3.29)$$

Dans la solution (3.29), la variable  $\delta T$  représente la variation de température, aux points de mesure, induite par une variation de position d'interface. Autrement dit, il s'agit de la sensibilité aux points de mesure vis-à-vis du phénomène à suivre (déplacement de la frontière). Elle est obtenue par la résolution du système d'équations en variation ((C.28) à (C.43)).

Le second paramètre  $d^k$  est la "direction de descente". Dans le cas de l'estimation d'une fonction, c'est un vecteur de la dimension de l'estimé, dont l'amplitude de chaque composante dépend de la correction à apporter. C'est dans ce terme qu'intervient la notion de gradient conjugué (3.26).

$$d^k = -\nabla J(\sigma^k) + \beta^{k-1} d^{k-1} \quad (3.30)$$

Le coefficient de conjugaison peut être exprimé par différentes expressions [97] :

– Fletcher et Reeves :

$$\beta^{k-1} = \frac{\|\nabla J^k\|^2}{\|\nabla J^{k-1}\|^2} \quad (3.31)$$

– Ribiere et Polak :

$$\beta^{k-1} = \frac{\nabla^T J^k \cdot (\nabla J^k - \nabla J^{k-1})}{\nabla J^{k-1} \cdot \nabla J^k} \quad (3.32)$$

– Hestenes et Stiefel :

$$\beta^{k-1} = \frac{(\nabla J^k)^T \cdot (\nabla J^k - \nabla J^{k-1})}{d^{k-1} (\nabla J^k - \nabla J^{k-1})} \quad (3.33)$$

Le gradient de la fonctionnelle à minimiser  $\nabla J(\sigma)$  est obtenu après résolution d'un problème adjoint construit à partir de la définition de la fonctionnelle de Lagrange associée au système d'équations du problème en variation.

### 3.3.2 Choix de la fonction “objectif”

Considérons la forme générale, présentée par la relation (3.25), de la fonction à minimiser. La factoriser par une constante ne modifie en rien son rôle et en choisissant judicieusement ces facteurs, cela peut simplifier les futurs développements.

Le système d'équations étant adimensionnalisé, le critère quadratique est mis en forme de façon à être une fonction de  $\theta(r, z, t)$  (3.8) et de  $\tilde{Y}_n$  la température mesurée sans dimension.

$$\tilde{Y}_n = \frac{Y_n - T_f}{T_f - T_{inf}} \quad (3.34)$$

Le critère peut ainsi être défini de la manière suivante :

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{1}{(T_f - T_{inf})^2} \sum_{n=1}^{Nc} \frac{r_n}{R} \left( \int_0^{t_{fin}} [(T(r_n, z_n, t; \sigma) - Y_n(t))]^2 dt \right) \quad (3.35)$$

Ce qui amène à :

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{Nc} \frac{r_n}{R} \left( \int_0^{t_{fin}} [(\theta(r_n, z_n, t; \sigma) - \tilde{Y}_n(t))]^2 dt \right) \quad (3.36)$$

L'expression du pas de descente est donc modifiée :

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} r_n (T(r_n, z_n, t; \sigma) - Y_n(t)) \delta T(r_n, z_n, t; \sigma) dt}{\int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} r_n (\delta T(r_n, z_n, t; \sigma))^2 dt} \quad (3.37)$$

Le critère (3.36) étant construit sur des données sans dimension, son amplitude sera relativement faible. Il est donc nécessaire d'en tenir compte lors de la définition du seuil de convergence de la procédure d'identification propre à la méthode de régularisation itérative.

La résolution du problème inverse consiste à déterminer, de façon itérative, les valeurs de  $\sigma(r, t)$  qui minimisent la fonctionnelle résiduelle (3.25) ou (3.36). Dans cette dernière, le champ de température  $T$  (ou  $\theta$ ) est une donnée issue de la résolution du problème direct (avec ou sans dimension). La minimisation du critère quadratique est donc contrainte par la résolution du problème direct. Pour résoudre ce type d'estimation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée.

Notons que, dans l'expression 3.36, le facteur  $\frac{r_n}{R}$  permet d'éviter l'apparition de source infinie lors de la résolution du problème adjoint. La contre partie est la non prise en compte des informations (températures) sur l'axe de symétrie. Néanmoins, cette difficulté n'apparaît que dans un repère axisymétrique, et la pondération n'a pas lieu d'être en tri-dimensionnel.

Les développements nécessaires aux formulations des problèmes direct, en variation et adjoint peuvent parfois paraître fastidieux. Pour cette raison, le développement complet est présenté en annexe C et seules les méthodes et expressions finales sont définies ici.

### 3.3.3 Fonctionnelle de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange fait intervenir la notion de fonctionnelle de Lagrange (ou Lagrangien), qui a pour spécificité de regrouper, dans la même expression, la fonctionnelle résiduelle et les différentes contraintes (égalité ou inégalité) pondérées par des multiplicateurs *a priori* inconnus.

Cette démarche conduit à une minimisation sans contrainte.

Pour appliquer l'écriture de la fonctionnelle résiduelle à tout le domaine d'étude, il convient d'utiliser la fonction de Dirac appliquée aux points de mesure (3.38).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} \frac{r_n}{R} \left[ (\theta(r_n, z_n, t; \sigma) - \tilde{Y}_n(t)) \right]^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ (\theta(r, z, t, \sigma) - \tilde{Y}(t)) \right]^2 \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dt \end{aligned} \quad (3.38)$$

Appliquée à cette étude, la fonctionnelle est présentée par l'équation (3.39) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t) - \tilde{Y}(t) \right]^2 \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dz dr dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} p(r, z, t) \left( -\rho(\theta) c_p(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) dz dr dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}(t)} \gamma(r, t) \theta(r, \sigma, t) dr dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max}(t)}^R \eta(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} (r, z_0, t) - \frac{S(r)}{T_f - T_0} + h_{tot}(\theta(r, z_0, t) + 1) \right) dr dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{z_0} \mu(z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} (R, z, t) + h_{tot}(\theta(R, z, t) + 1) \right) dz dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \alpha(r, t) \left( -\lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} (r, Z, t) + h_{tot}(\theta(r, Z, t) + 1) \right) dr dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma} \beta(z, t) \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} (r_0, z, t) dz dt + \int_{r_0}^R \int_Z^{z_0} \xi(r, z) (\theta(r, z, t_0) + \theta_0) dz dr \end{aligned} \quad (3.39)$$

Où  $p(r, z, t)$ ,  $\gamma(r, t)$ ,  $\eta(r, t)$ ,  $\mu(z, t)$ ,  $\alpha(r, t)$ ,  $\beta(z, t)$  et  $\xi(r, z)$  sont les multiplicateurs de Lagrange. En prévision des prochaines étapes de l'écriture de ce problème inverse, les propriétés thermophysiques ( $\rho$ ,  $c_p$  et  $\lambda$ ) sont exprimées en fonction de  $\theta$ .

La condition d'optimalité est obtenue lorsque la variation première de la fonctionnelle s'annule (3.40) :

$$\delta \mathcal{L}(\sigma; \delta \sigma) = 0 \quad (3.40)$$

Avec  $\delta\sigma$ , une variation quelconque de la fonction  $\sigma(r, t)$ .

Afin d'exprimer cette variation de la fonctionnelle de Lagrange, il est nécessaire de présenter les formulations en variation de la fonctionnelle résiduelle ainsi que celles du problème direct (3.17) à (3.23).

### 3.3.4 Problème en variation ou problème de sensibilité

En appliquant, à la fonction  $\sigma(r, t)$  une variation  $\delta\sigma(r, t)$ , la température  $\theta(r, z, t)$  et la fonctionnelle résiduelle  $J(\sigma)$  subissent respectivement les variations  $\delta\theta(r, z, t)$  et  $\delta J(\sigma; \delta\sigma)$ .

#### 3.3.4.1 Variation de la fonctionnelle résiduelle

En définissant la variation pour une fonction  $F(x)$  quelconque par l'équation (3.41) :

$$dF(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{F(x + \varepsilon x) - F(x)}{\varepsilon} \right) \quad (3.41)$$

il est donc obtenu (3.42) pour la fonctionnelle  $J(\sigma)$  :

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = J(\sigma + \delta\sigma) - J(\sigma) \quad (3.42)$$

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = \dots$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left( \left[ \theta(r, z, t; \sigma) + \delta\theta - \tilde{Y}(t) \right]^2 - \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right]^2 \right) \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dt \quad (3.43)$$

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left( \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right] \delta\theta(r, z, t) \right) \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dt$$

(3.44)

Il est à noter que le  $\delta\theta$ , qui apparaît dans l'équation (3.44), est la forme adimensionnée du  $\delta T$  de la relation (3.29).

#### 3.3.4.2 Écriture de l'équation de la chaleur en variation

Le problème direct en variation est construit de la même façon, en appliquant une variation à chaque terme dans l'équation de la chaleur (3.17).

Soit,

1. Pour le terme temporel

En appliquant la variation et en posant :  $\rho(\theta)c_p(\theta) = C(\theta)$ , le terme temporel de l'équation de la chaleur devient :

$$\delta \left[ C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = C(\theta + \delta\theta) \frac{\partial(\theta + \delta\theta)}{\partial t} - C(\theta) \frac{\partial(\theta)}{\partial t} \quad (3.45)$$

En considérant le développement limité de Taylor d'ordre un de  $C(\theta + \delta\theta)$  :

$$C(\theta + \delta\theta) = C(\theta) + \frac{dC}{d\theta} \delta\theta \quad (3.46)$$

L'expression (3.45) peut être réécrite,

$$\delta [\dots] = \left( C(\theta) + \frac{dC}{d\theta} \delta\theta \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} \right) - C(\theta) \frac{\partial(\theta)}{\partial t} \quad (3.47)$$

$$\delta [\dots] = C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + C(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} + \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta\theta + \underbrace{\frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} \delta\theta}_{O(\delta\theta^2)} - C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.48)$$

$$\boxed{\delta \left[ C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = C(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} + \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta\theta} \quad (3.49)$$

2. Pour le terme de conduction radiale

$$\delta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta + \delta\theta) \frac{\partial(\theta + \delta\theta)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (3.50)$$

De la même manière que pour  $C$ , le développement limité de Taylor d'ordre un de  $\lambda(\theta + \delta\theta)$ ,

$$\lambda(\theta + \delta\theta) = \lambda(\theta) + \frac{d\lambda}{d\theta} \delta\theta$$

L'expression (3.50) peut être réécrite (Annexe C) :

$$\boxed{\delta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(\theta) r \frac{\partial \delta\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{d\lambda}{d\theta} \delta\theta r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)} \quad (3.51)$$

En développant (Annexe C) :

$$\delta [\dots] = \frac{1}{r} \lambda(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial r} + 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \delta\theta}{\partial r} + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial r^2} + \delta\theta \left[ \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right] \quad (3.52)$$

3. Pour le terme de conduction dans la profondeur

Le développement est identique au précédent (annexe C) et amène à :

$$\delta \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] = 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial z^2} + \delta\theta \left[ \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (3.53)$$

Rappelons que la définition de l'équation de la chaleur en variation est établie pour deux raisons. Premièrement, elle permet de déterminer le pas de descente  $\gamma^k$  après avoir résolu le problème en variation. Deuxièmement, elle est utilisée pour écrire la fonctionnelle de Lagrange en variation  $\delta\mathcal{L}$ .

L'expression 3.54 est l'assemblage des précédents termes 3.49, 3.52 et 3.53. Cette formulation est conservée pour écrire la fonctionnelle de Lagrange en variation.

$$C(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \lambda(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial r} + 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \delta\theta}{\partial r} + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial r^2} + 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta\theta}{\partial z^2} + \delta\theta \left[ \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \quad (3.54)$$

Cependant, pour la détermination de la variable  $\delta\theta$  par résolution numérique, une formulation contractée est mise en place. Celle-ci a l'avantage de pouvoir être utilisée directement sous COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>. Elle repose sur le principe de la dérivée de fonction composée, qui peut être illustrée à partir de la variation de la capacité thermique ( $C(\theta)$ ) en fonction du temps.

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial t} = \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.55)$$

Appliquée aux dérivées des autres propriétés thermophysiques, elle devient :

$$\frac{\partial \lambda(\theta)}{\partial r} = \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \rho(\theta)}{\partial r} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (3.57)$$

Donc, en remplaçant les trois dernières expressions dans 3.54 et en utilisant le principe de dérivée en chaîne, la formulation contractée est obtenue :

$$\boxed{\frac{\partial(C(\theta)\delta\theta)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z^2}} \quad (3.58)$$

### 3.3.4.3 Écriture des conditions aux limites en variation

Pour définir les conditions aux limites en variation, la même méthode est appliquée aux équations 3.18 à 3.23 (rappel : le développement est en annexe C).

#### 1. sur la frontière $\Gamma_0(t)$ :

Sur cette frontière, une condition de Dirichlet est imposée,  $\theta_f = 0$  en température sans dimension. La condition de variation en température devrait donc être nulle et une variation  $\delta\sigma$  devrait être appliquée sur la géométrie (ALE).

Ce type de condition entraîne des modifications du maillage et donc des incertitudes sur le calcul des températures aux points de mesure (valeurs de  $\delta\theta(r_n, z_n, t; \sigma)$ ) nécessaires à la détermination du pas de descente (3.29).

### 3.3 Écriture du problème inverse

Une hypothèse particulièrement simplificatrice est de considérer sur  $\Gamma_0(t)$ , une variation de température  $\delta\theta$  plutôt qu'une variation de position  $\delta\sigma$  (hypothèse mise en place par C. H. Huang et al. [57]). Elle est déterminée par un développement limité de Taylor.

Et en se limitant au premier ordre, cela permet d'écrire (3.59) :

$$\theta(\sigma + \delta\sigma) \approx \theta(\sigma) + \delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (3.59)$$

De plus,  $\theta(\sigma + \delta\sigma) - \theta(\sigma) = \delta\theta$ , donc :

$$\boxed{\delta\theta(r, \sigma, t) = \delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z}} \quad (3.60)$$

2. sur la frontière  $\Gamma_1$  :

$$\rightarrow \delta \left[ -\lambda(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right] = - \frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z} \quad (3.61)$$

$$\rightarrow \delta \left[ -\frac{S(r)}{T_f - T_\infty} + h_{tot}(\theta + 1) \right] = \frac{-S(r)}{T_f - T_\infty} + h_{tot}(\theta + \delta\theta + 1) + \frac{S(r)}{T_f - T_\infty} - h_{tot}(\theta + 1) \quad (3.62)$$

$$= h_{tot}\delta\theta \quad (3.63)$$

Soit,

$$\boxed{-\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z} = h_{tot}\delta\theta} \quad (3.64)$$

3. sur la frontière  $\Gamma_2$  :

$$\boxed{-\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial r} = h_{tot}\delta\theta} \quad (3.65)$$

4. sur la frontière  $\Gamma_3$  :

$$\boxed{\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z} = h_{tot}\delta\theta} \quad (3.66)$$

5. sur la frontière  $\Gamma_4$  :

La condition d'axisymétrie entraîne (3.67)

$$\boxed{\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial r} = 0} \quad (3.67)$$

6. à l'instant  $t = 0$  :

À l'instant initial, la température est une constante, donc sa variation est nulle (3.68).

$$\boxed{\delta\theta = 0} \quad (3.68)$$

Il est intéressant de noter que les conditions sur les frontières  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont assimilables à des pertes par convection conditionnées par le coefficient  $h_{tot}$  et par une température ambiante égale à 0.

### 3.3.5 Fonctionnelle de Lagrange en variation

#### 3.3.5.1 Formulation initiale

Connaissant les éléments du problème direct en variation, la fonctionnelle de Lagrange peut, elle aussi, être écrite en variation en remplaçant les différents termes qui la composent par leurs équivalents en variation (formulation "développée").

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) &= \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right] \delta\theta(r, z, t) \delta(r-r_n) \delta(z-z_n) dz dr dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} p(r, z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} + r\lambda(\theta) \frac{\partial^2\delta\theta}{\partial r^2} + 2r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} + r\lambda(\theta) \frac{\partial^2\delta\theta}{\partial z^2} + 2r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} + \dots \right. \\ &\dots + r\delta\theta \left[ \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t} \right] - rC(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial t} \Big) dz dr dt + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}(t)} \gamma(r, t) \left( \delta\theta(r, \sigma, t) - \delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) dr dt}_{\text{sur } \Gamma_0(t)} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max}(t)}^R \eta(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} (r, z_0, t) + \delta\theta(r, z_0, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + h_{tot} \delta\theta(r, z_0, t) \right) dr dt}_{\text{sur } \Gamma_1} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\mu(z,t)} \mu(z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} (R, z, t) + \delta\theta(R, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} + h_{tot} \delta\theta(R, z, t) \right) dz dt}_{\text{sur } \Gamma_2} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \alpha(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} (r, Z, t) + \delta\theta(r, Z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - h_{tot} \delta\theta(r, Z, t) \right) dr dt}_{\text{sur } \Gamma_3} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma} \beta(z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} (r_0, z, t) + \delta\theta(r_0, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) dz dt}_{\text{sur } \Gamma_4} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{\int_{r_0}^R \int_Z^{\xi(r,z)} \xi(r, z) (\delta\theta(r, z, t_0)) dz dr}_{\text{à } t=t_0} \quad (3.69) \end{aligned}$$

Pour des raisons de simplification d'écriture, l'équation de la chaleur en variation, introduite dans la fonctionnelle de Lagrange, est multipliée par un facteur  $r$ . Cela n'a aucune influence sur la validité de la suite du développement, car rappelons que les contraintes introduites dans un

Lagrangien sont imposées égales à zero.

La condition d'optimalité étant obtenue pour  $\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = 0$ , il est nécessaire d'annuler les termes factorisés par  $\delta\theta$ . Or, dans l'équation (3.69), des dérivées de la variation de température subsistent. Des intégrations par parties sont appliquées à ces termes afin de réduire l'ordre de dérivation.

#### 3.3.5.2 Réduction de l'ordre des dérivées de $\delta\theta$

En ne considérant que la portion de la fonctionnelle de Lagrange (deuxième et troisième lignes de l'équation 3.69) dans laquelle interviennent les termes à reformuler et en distribuant le multiplicateur de Lagrange  $p(r, z, t)$ , les intégrations par parties à réaliser peuvent être identifiées ( $IPP_1, IPP_2, IPP_3, IPP_4, IPP_5$  et  $IPP_6$  sur l'équation 3.70).

**Remarque :** Dans l'expression (3.69), les éléments issus de l'équation de la chaleur en variation sont intégrés sur les trois dimensions ( $r, z$  et  $t$ , équation 3.70). Pour des raisons de clarté, lors du développement des  $IPP$ , un seul symbole intégrale est présenté, cependant, les deux autres subsistent.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = & \dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)_{ouzo}} \left( \boxed{IPP_1} + \boxed{IPP_2} + \boxed{IPP_3} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \boxed{IPP_4} + \boxed{IPP_5} + pr\delta\theta \left[ \dots + \dots + \dots \right] - \boxed{IPP_6} \right) dzdrdt + \dots \end{aligned} \quad (3.70)$$

Pour ce cas aussi, seule l'expression de  $IPP_1$  est illustrée, les autres termes étant présentés en annexe C :

$IPP_1$  :

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^R p\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} dr &= \left[ p\lambda(\theta)\delta\theta \right]_{r_0}^R - \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) \delta\theta dr - \int_{r_0}^R p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta dr \\ &= \left[ p\lambda(\theta)\delta\theta \right]_{r_0}^R - \int_{r_0}^R \left( \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) \delta\theta + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta \right) dr \end{aligned} \quad (3.71)$$

Comme l'illustre l'expression 3.71, les résultats de ces intégrations font intervenir deux éléments. Premièrement, des termes localisés sur les conditions aux limites à ajouter aux parties correspondantes dans la fonctionnelle de Lagrange (3.69). Deuxièmement, des termes intégrés

sur tout le domaine à factoriser par  $\delta\theta$ .

La portion de fonctionnelle (3.70) peut donc être reformulée en remplaçant les termes encadrés par les intégrales restant après les intégrations par parties (C).

Après simplification, la portion de fonctionnelle 3.70 peut, en partie, être remplacée par l'expression 3.72 dans laquelle  $\delta\theta$  est en facteur :

$$\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = \dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) + r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) \delta\theta + r C(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} \right) \delta\theta dz dr dt + \dots \quad (3.72)$$

### 3.3.5.3 Complément des conditions aux limites

Dans cette partie, les éléments de la fonctionnelle de Lagrange correspondant aux conditions aux limites sont complétés par les résultats obtenus après intégrations par parties.

Cependant, avant de pouvoir présenter la fonctionnelle  $\delta\mathcal{L}$ , un léger développement est nécessaire. Rappelons par exemple, sous sa forme complète, la partie qu'il reste à traiter pour  $IPP_1$  :

$$IPP_1 \rightarrow \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \left[ p \lambda(\theta) \delta\theta \right]_{r_0}^R dz dt \quad (3.73)$$

Une partie de cette expression étant à appliquer en  $R$  et l'autre en  $r_0$ , c'est-à-dire sur les frontières  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  :

$$IPP_1 \rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{z_0} p \lambda(\theta) \delta\theta(R, z, t) dz dt}_{sur \Gamma_2} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r_0,t)} p \lambda(\theta) \delta\theta(r_0, z, t) dz dt}_{sur \Gamma_4} \quad (3.74)$$

Ainsi, en procédant de la même manière pour les résultats des cinq autres intégrations par parties, des termes supplémentaires sont obtenus pour chaque condition aux limites spatiale et temporelle.

### 3.3.5.4 Forme finale de variation de la fonctionnelle de Lagrange

Cette étape finale consiste à assembler les différents éléments de la fonctionnelle de manière à extraire, dans une prochaine partie, les composantes du problème adjoint.

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) &= \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}_n(t) \right] \delta\theta(r, z, t) \delta(r-r_n) \delta(z-z_n) dz dr dt + \dots \\
 &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) + r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) \delta\theta + r C(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} \right) \delta\theta dz dr dt + \dots \\
 &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}(t)} \left[ \gamma(r, t) \left( \delta\theta(r, \sigma, t) - \delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + r \left( p \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, \sigma, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta(r, \sigma, t) + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \delta\theta(r, \sigma, t) \right) \right] dr dt + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max}(t)}^R \left[ \eta(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, z_0, t) + \delta\theta(r, z_0, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + h_{tot} \delta\theta(r, z_0, t) \right) + r \left( p \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, z_0, t) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta(r, z_0, t) + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \delta\theta(r, z_0, t) \right) \right] dr dt + \dots \\
 &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{z_0} \left[ \mu(z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(R, z, t) + \delta\theta(R, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} + h_{tot} \delta\theta(R, z, t) \right) + pr \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(R, z, t) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial p}{\partial r} r \lambda(\theta) \delta\theta(R, z, t) + pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta(R, z, t) \right] dz dt + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \alpha(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, Z, t) + \delta\theta(r, Z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - h_{tot} \delta\theta(r, Z, t) \right) - rp \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, Z, t) + \\
 &\quad + r \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta(r, Z, t) - rp \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \delta\theta(r, Z, t) dr dt + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma} \beta(z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(r_0, z, t) + \delta\theta(r_0, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) - pr \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(r_0, z, t) \\
 &\quad + \frac{\partial p}{\partial r} r \lambda(\theta) \delta\theta(r_0, z, t) - pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta(r_0, z, t) dz dt + \\
 &+ \int_{r_0}^R \int_Z^{z_0} \left[ \xi(r, z) \delta\theta(r, z, t_0) - rp C(\theta) \delta\theta(r, z, t_0) \right] dz dr + \int_{r_0}^R \int_Z^{z_0} rp C(\theta) \delta\theta(r, z, t_{fin}) dz dr
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

### 3.3.5.5 Dédution du problème adjoint

Afin de satisfaire la condition d'optimalité ( $\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = 0$ ), il faut annuler les différents facteurs de la variation de température  $\delta\theta$ . C'est-à-dire les termes multipliés par  $\delta\theta(r, z, t)$ ,  $\delta\theta(r_0, z, t)$ ,  $\delta\theta(R, z, t)$ ,  $\delta\theta(r, Z, t)$ ,  $\delta\theta(r, z_0, t)$ ,  $\delta\theta(r, \sigma, t)$  ou par leurs dérivées.

– pour  $\delta\theta(r, z, t)$

$$\frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}_n(t) \right] \delta(r-r_n) \delta(z-z_n) + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) + r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) + r C(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{3.76}$$

En mettant  $r$  en facteur, l'expression précédente peut s'écrire sous une forme plus classique :

$$-C(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} = \lambda(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + S(r, z, t) = 0 \tag{3.77}$$

Avec :

$$S(r, z, t) = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{N_c} \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right] \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) \quad (3.78)$$

une somme de sources localisées aux différents points de mesure. Notons que la précédente multiplication de la fonction objectif (3.36) par  $\frac{r_n}{R}$  permet d'éviter d'avoir  $r$  au dénominateur de la source (3.78). En effet, dans le cas contraire, aucun point de mesure ne peut être positionné sur l'axe de symétrie  $r = 0$ .

– pour  $\delta\theta(r, \sigma, t)$  et  $\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, \sigma, t)$  sur  $\Gamma_0$

$$rp(r, \sigma, t)\lambda(\theta) = 0 \rightarrow \boxed{p(r, \sigma, t) = 0} \quad (3.79)$$

$$\gamma(r, t) - r \frac{\partial p}{\partial z}(r, \sigma, t)\lambda(\theta) + p(r, \sigma, t)r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \rightarrow \gamma(r, t) = r \frac{\partial p}{\partial z}(r, \sigma, t)\lambda(\theta) \quad (3.80)$$

– pour  $\delta\theta(r, z_0, t)$  et  $\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, z_0, t)$  sur  $\Gamma_1$

$$\eta(r, t)\lambda(\theta) + rp(r, z_0, t)\lambda(\theta) = 0 \rightarrow \eta(r, t) = -pr \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} -p(r, z_0, t)r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - p(r, z_0, t)r h_{tot} - r \frac{\partial p}{\partial z}(r, z_0, t)\lambda(\theta) + rp(r, z_0, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \\ \rightarrow \boxed{-\lambda(\theta) \frac{\partial p}{\partial z}(r, z_0, t) = h_{tot}p(r, z_0, t)} \end{aligned} \quad (3.82)$$

– pour  $\delta\theta(R, z, t)$  et  $\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(R, z, t)$  sur  $\Gamma_2$

$$\mu(z, t)\lambda(\theta) + p(R, z, t)R\lambda(\theta) = 0 \rightarrow \mu = -pR \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} -p(R, z, t)R \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} - p(R, z, t)R h_{tot} - R \frac{\partial p}{\partial r}(R, z, t)\lambda(\theta) + rp(R, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} = 0 \\ \rightarrow \boxed{-\lambda(\theta) \frac{\partial p}{\partial r}(R, z, t) = h_{tot}p(R, z, t)} \end{aligned} \quad (3.84)$$

– pour  $\delta\theta(r, Z, t)$  et  $\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, Z, t)$  sur  $\Gamma_3$

$$\alpha(r, t)\lambda(\theta) - p(r, Z, t)r\lambda(\theta) = 0 \rightarrow \alpha(r, t) = pr \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} p(r, Z, t)r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + p(r, Z, t)r h_{tot} - r \frac{\partial p}{\partial z}(r, Z, t)\lambda(\theta) - rp(r, Z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \\ \rightarrow \boxed{\lambda(\theta) \frac{\partial p}{\partial z}(r, Z, t) = h_{tot}p(r, Z, t)} \end{aligned} \quad (3.86)$$

– pour  $\delta\theta(r_0, z, t)$  et  $\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r_0, z, t)$  sur  $\Gamma_4$

$$\beta(z, t)\lambda(\theta) - p(r_0, z, t)r_0\lambda(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \beta(r, t) = pr_0 \quad (3.87)$$

$$p(r_0, z, t)r_0 \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} - r_0 \frac{\partial p}{\partial r}(r_0, z, t)\lambda(\theta) - r_0 p(r_0, r, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\lambda(\theta) \frac{\partial p}{\partial r}(r_0, z, t) = 0} \quad (3.88)$$

Le système de deux équations (3.81) et (3.80) permet de déterminer la condition en  $p$  sur la limite  $\Gamma_0$ . Comme dans les problèmes directe et en variation, c'est une condition de Dirichlet imposant  $p = 0$ .

Les conditions aux limites présentées par les expressions (3.82), (3.84) et (3.86) sont équivalentes à des pertes par convection dans un milieu de température infinie nulle.

La dernière condition (3.88) est à un flux (en  $p$ ) nul sur la frontière  $\Gamma_4$ , ce qui revient donc à l'axisymétrie.

La condition initiale n'est, dans ce problème, pas exploitable car elle implique de connaître le multiplicateur  $\xi$ . Cependant, la variable adjointe  $p$  est connue à l'instant final (3.89).

$$p(r, z, t_{fin}) = 0 \quad (3.89)$$

Notons que cette particularité conduit à une résolution du problème adjoint à rebours.

Le système d'équations permettant de résoudre le problème adjoint est donc posé. Il est de forme particulièrement semblable au problème direct, au signe du terme temporel près. Il est à noter que même si le problème direct est non linéaire, le problème adjoint, lui est parfaitement linéaire. En effet, les propriétés thermophysiques ne sont pas fonction de  $p$  mais de la température  $\theta$ . Un terme source apparaît, il est constitué des écarts de température appliqués sur les positions des points de mesure.

Par définition, la résolution de ce problème adjoint permet de déterminer la variable  $p$  (multiplicateur de Lagrange) annulant quasiment tous les termes de la fonctionnelle de Lagrange. Mais il reste un terme non nul issu de la condition aux limites en variation sur la frontière  $\Gamma_0$ . Ce dernier permet de déterminer la variation  $\delta(\sigma; \delta\sigma)$ .

$$\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}} -\gamma\delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z}(r, \sigma, t) dr dt \quad (3.90)$$

Connaissant l'expression de  $\gamma$  par la relation (3.80), il est possible d'écrire :

$$\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = - \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}} r\lambda(\theta)\delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}(r, \sigma, t) dr dt \quad (3.91)$$

### 3.3.5.6 Variation de la fonctionnelle résiduelle

La fonctionnelle résiduelle est minimale lorsque sa variation en fonction de l'estimé s'annule. Or, il a été vu précédemment que rechercher le minimum de la variation de la fonctionnelle de Lagrange est équivalent à rechercher celui de la variation de la fonctionnelle résiduelle. Soit,  $Min(\delta J(\sigma; \delta\sigma)) = Min(\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma))$ .

Rappelons que la fonction  $J(\sigma)$  est, par construction, une fonction de carré intégrable. Par conséquent, elle est définie dans l'espace de Lebesgue  $L_2$ . Alors, il est possible d'écrire la relation (3.92).

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = (J', \delta\sigma)_{L_2} \quad (3.92)$$

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}} \nabla J(\sigma) \delta\sigma r dr dt \quad (3.93)$$

Par identification entre les relations (3.93) et (3.91), il est possible de déduire l'expression du gradient de la fonctionnelle résiduelle  $\nabla J$  :

$$\nabla J = -\lambda(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}(r, \sigma, t) \quad (3.94)$$

Dans cette méthode inverse, le gradient de la fonctionnelle à minimiser est un paramètre primordial car il conditionne la direction de descente. En d'autre terme, il apporte une information sur la correction à apporter à la fonction  $\sigma^k$  pour calculer  $\sigma^{k+1}$ .

En observant l'allure de l'expression (3.94), il apparaît que cette "correction" est déterminée à partir du gradient de la variable adjoint  $\frac{\partial p}{\partial z}$ . Rappelons que cette variable  $p$ , est la solution d'un problème dans lequel les écarts entre la température mesurée et simulée sont des sources localisées aux points de mesure. Par conséquent, la direction de descente est indirectement une image de l'erreur qu'il subsiste à une itération donnée.

### 3.3.6 Critère d'arrêt

La méthode inverse de régularisation itérative est construite sur l'association de la méthode d'optimisation du gradient conjugué (ou de la plus forte pente) avec la détermination d'un critère de convergence minimal  $J$  tenant compte du bruit de mesure (chapitre 1).

Pour la détermination de ce critère, considérons  $\delta$  l'écart-type d'un bruit supposé distribué de façon normale.

$$\left| \theta(r_m, z_m, t) - \tilde{Y}_m(t) \right| \approx \delta \quad (3.95)$$

En intégrant (3.95) dans la fonctionnelle résiduelle (3.36) :

$$J^* = \sum_{n=1}^{Nc} \frac{r_n}{R} \int_{t_0}^{t_{fin}} \delta^2 dt \quad (3.96)$$

Cette variable  $J^*$  est donc la valeur minimale que peut atteindre la fonctionnelle résiduelle avec des mesures de température bruitées. Il s'agit donc du paramètre qui est choisi comme critère d'arrêt de la procédure itérative.

### 3.3.7 Algorithme

Les différentes étapes à suivre pour la résolution du problème inverse sont les suivantes :

**Étape 1** : Définir la valeur initiale  $\sigma(r, t)^0$ ,  $k = 0$

**Étape 2** : Résoudre le problème direct  $\theta(r, z, t)$

**Étape 3** : **Boucle de convergence** - Calculer  $J$  et le comparer à  $J^*$

(Si satisfait, interrompre la procédure)

**Étape 4** : Résoudre le problème adjoint  $p(r, z, t)$

**Étape 5** : Calculer le gradient  $\nabla J(r, z, t)$

**Étape 6** : Calculer le coefficient de conjugaison  $\beta^{k-1}$

**Étape 7** : Calculer la direction de descente  $d^k$

**Étape 8** : Résoudre le problème en sensibilité  $\delta\theta(r, z, t)$

**Étape 9** : Calculer le pas de descente  $\gamma^k$

**Étape 10** : Calculer le nouvel estimé  $\sigma(r, t)^{k+1}$

**Étape 11** : Résolution du problème direct  $\theta(r, z, t)$

**Étape 12** :  $k = k + 1$  et retour à l'**Étape 3**

Cet algorithme a été implémenté à l'aide du logiciel MATLAB<sup>®</sup> couplé avec le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> pour la résolution des trois problèmes direct, en sensibilité et adjoint.

## 3.4 Application et résultats

Afin d'appliquer les précédentes définitions, un cas purement numérique est développé. Dans cette partie, les "données expérimentales" nécessaires à l'inversion sont en fait issues de plusieurs cas numériques, nous les nommerons donc plutôt : "données de référence".

Premièrement, le problème inverse est validé pour une évolution d'interface donnée. Les températures de référence sont donc issues d'une résolution de référence du problème direct. Cette analyse est mise en place de manière à observer la qualité de l'estimation dans le cas le plus favorable. En effet, dans ce cas, le problème direct est parfaitement identique au "cas expérimental" (la simulation de référence). Ainsi, les limites de l'identification sont observées, sans être perturbées par les écarts de représentation existant entre la simulation et le problème physique. Des paramètres propres à l'inversion pourront donc être analysés. Pour simplifier cette étude, les propriétés thermophysiques sont supposées constantes.

Deuxièmement, un bruit artificiel est ajouté aux données (températures) de référence et la notion de régularisation itérative est mise en place. Aussi, différentes méthodes de calcul du coefficient de conjugaison sont implémentées afin d'en observer les effets sur un tel problème inverse.

Lors de cette validation, une analyse est effectuée sur la méthode de détermination du coefficient de conjugaison et sur son influence sur la convergence.

### 3.4.1 Définition du problème

#### Évolution de référence du front

Pour cette validation, les positions de référence de l'interface, sont tracées sur la figure 3.8. Sur cette même illustration, les points de mesure et la position de l'interface à l'instant final sont identifiés. Notons que, dans cette étude théorique, les points de mesure sont des projections homothétiques des points de contrôles (après paramétrisation) de l'interface à l'instant final. Ces derniers sont distants de  $1,5 \text{ mm}$  de la zone fondue finale ( $T < 1200 \text{ }^\circ\text{C}$  - contrainte expérimentale).

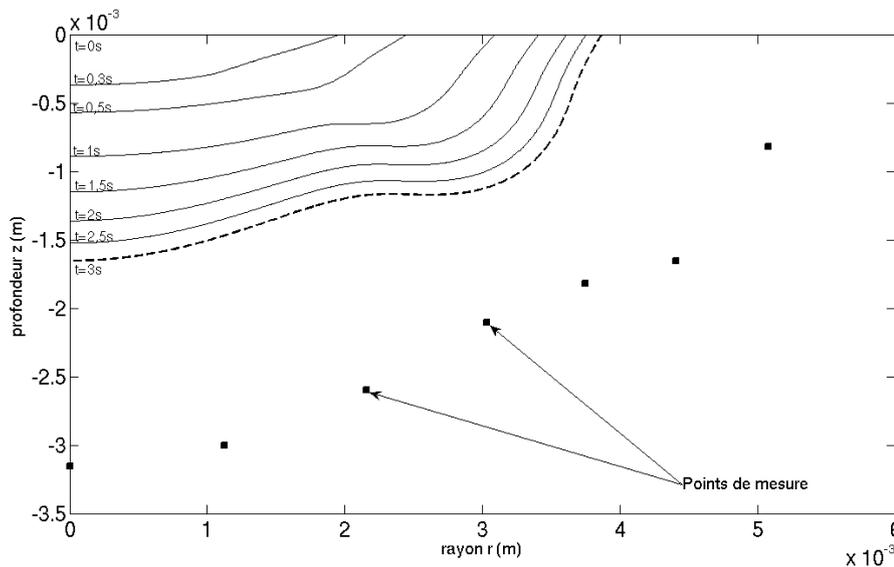


Figure 3.8 – Définition de la fonction  $\sigma(r, t)$  de référence et positionnement des points de mesure

#### Paramétrisation de la fonction $\sigma(r, t)$

Dans ce cas, les courbes représentatives de l'interface, sont paramétrées par sept points de

contrôle plus deux points supplémentaires en surface. Ces deux derniers sont positionnés de façon à contrôler la transition entre l'interface et la surface de la pièce. Leurs positions ne sont donc pas à estimer car, expérimentalement, elles sont mesurées.

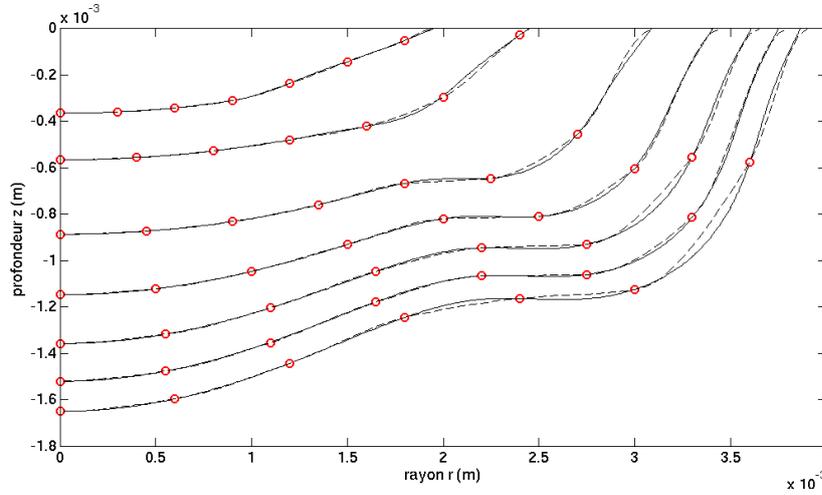


Figure 3.9 – Définition de la paramétrisation de la fonction  $\sigma(r, t)$

Sur la figure 3.9, les courbes en trait plein sont les données, celles en trait interrompu sont les courbes paramétrées et les points sont les points de contrôle. Ici, il s'agit d'une interpolation cubique par morceaux (**polynôme d'Hermite**). Notons que pour les instants finaux, la représentation n'est pas parfaite. Cependant, cette représentation est conservée pour sa stabilité vis à vis des autres méthodes telle l'interpolation par les Splines cubiques.

### Prise en compte d'un bruit de mesure sur les températures

Afin de tester ce problème inverse dans des conditions proches de l'expérimentation, un bruit "virtuel" est ajouté aux températures considérées comme références. L'amplitude et la distribution de ce bruit sont conditionnées par des essais expérimentaux (première série de mesures - Chapitre 4).

Le bruit supposé de valeur moyenne nulle, est distribué selon une loi normale. Compte tenu de ces deux hypothèses et ayant des signaux mesurés expérimentalement, il est possible de reconstruire une perturbation équivalente (figure 3.10).

Ce bruit permet de calculer une valeur minimale de la fonctionnelle résiduelle (sans dimension)  $J^*$  :

$$J^* = \sum_{n=1}^{Nc} \frac{r_n}{R} \int_{t_0}^{t_{fin}} \delta^2 dt \approx \sum_{n=1}^{Nc} \frac{r_n}{R} \sum_{t_0}^{t_{fin}} \delta^2 dt = 0,0027 \quad (3.97)$$

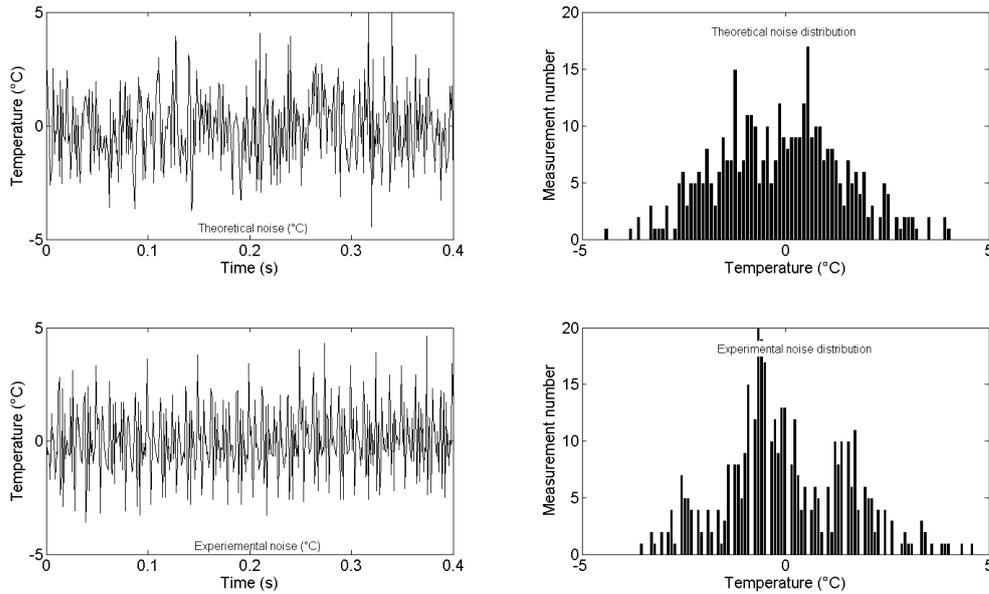


Figure 3.10 – Comparaison du bruit virtuel et expérimental

### 3.4.2 Résultats

Les résultats présentés ici, sont de deux ordres : premièrement, les réductions des fonctionnelles résiduelles et deuxièmement, les évolutions de fronts estimés.

La figure 3.11 illustre les décroissances de  $J$  avec différentes méthodes de calcul du coefficient de conjugaison ( $\beta^{k-1}$ ) : Ribiere et Polak (RP), Fletcher et Reeves (FR), Hestenes et Stiefel (HS). Les résultats de la méthode de la plus forte pente (SD) sont aussi présentés.

Sur la partie (A) (figure 3.11) sont regroupées les évolutions des fonctions coûts de chaque méthode pour des températures bruitées. Seul le résultat de la plus forte pente est présenté pour des données de référence non bruitées. Les courbes indiquent que :

- La valeur minimale ( $J^*$ ) de la fonctionnelle résiduelle est atteinte avec la méthode de la plus forte pente.
- Sans bruit, la fonction coût est réduite à une valeur bien plus faible que  $J^*$  mais elle n'est pas parfaitement nulle.
- Les méthodes utilisant le conjugué du gradient présentent des évolutions similaires et divergent toutes.

La première remarque, concernant le fait de pouvoir atteindre  $J^*$ , permet de valider de façon globale le problème inverse. Cela signifie que dans un contexte expérimental, en utilisant la méthode de la plus forte pente et pour un niveau de bruit équivalent à celui appliqué ici, l'évolution du front de fusion pourrait être déterminé de façon suffisante.

La seconde remarque indique que, même dans un cas parfait, la méthode ne permet pas de

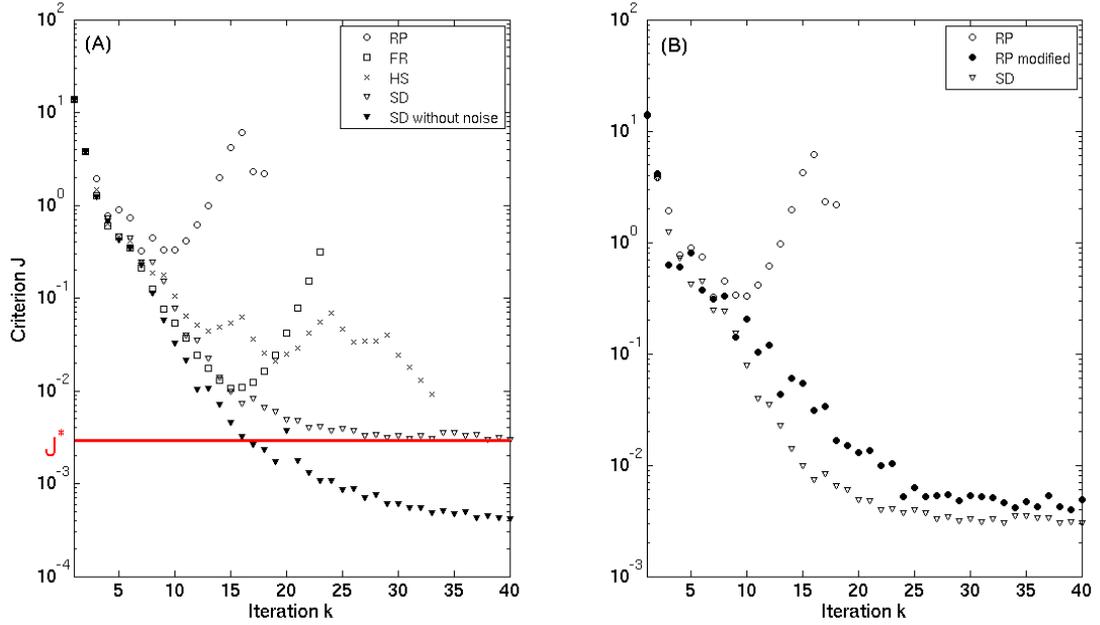


Figure 3.11 – Réduction de la fonctionnelle résiduelle pour différentes méthodes

retrouver une forme de front parfaitement égale à la forme réelle (ou de référence). Cela s'explique en considérant la méthode de simulation mise en œuvre dans cette étude. En effet, il s'agit de déplacer une frontière de la géométrie au cours du temps et cela avec la méthode ALE. Ce déplacement implique un mouvement du maillage dans tout le domaine et plus particulièrement autour des points de mesure de la température. Ces derniers subissent donc une erreur d'interpolation variant au cours du déplacement de la frontière (donc du temps), ce qui peut être considéré comme un bruit numérique mais dont l'amplitude dépend de l'évolution du front, donc des itérations du problème inverse.

De plus, rappelons que la descente de ces méthodes est conditionnée par le gradient de la fonctionnelle résiduelle, elle-même une fonction du gradient de la variable adjointe se sur le front. Aussi, les sources du problème adjoint sont les écarts entre les températures mesurées et simulées, appliquées aux points de mesure. Donc, la descente est perturbée par ce bruit numérique.

La dernière remarque est liée à la précédente. En effet, le bruit numérique est différent entre deux itérations consécutives. Donc, le calcul du coefficient de conjugaison (3.31, 3.32 et 3.33) étant une fonction des gradients  $\nabla J^k$  et  $\nabla J^{k-1}$ , il s'en trouve perturbé et la direction de aussi. Après quelques itérations, une erreur non négligeable est accumulée dans le calcul de la direction de descente et les fonctionnelles résiduelles finissent par ne plus décroître.

En conclusion de cette première analyse, il est possible de dire que les méthodes utilisant le conjugué du gradient finissent par accumuler une erreur et donc par diverger. Une solution pour éviter ce problème est de ré-initialiser le calcul du coefficient de conjugaison lorsque que la fonction coût ne diminue plus. Cette modification est appliquée sur le cas le plus défavorable, la méthode de Ribiere et Polak dont la convergence est perturbée le plus rapidement ( $\approx 12$  itérations). Les résultats présentés sur la partie (B) de la figure 3.11 illustrent une nette amélioration

de la réduction de la fonction  $J$ . Cependant, l'intérêt de ces méthodes est de permettre une convergence en un nombre fini d'itérations et donc d'être plus rapides que la plus forte pente. Or ici, la ré-initialisation crée un retard qui ralentit la convergence et enlève donc tout intérêt à cette méthode.

L'unique méthode présentant une valeur de fonctionnelle résiduelle égale à la valeur minimale possible  $J^*$  est donc la méthode de la plus forte pente. La seconde étape de cette analyse est une observation des fronts estimés (figure 3.12).

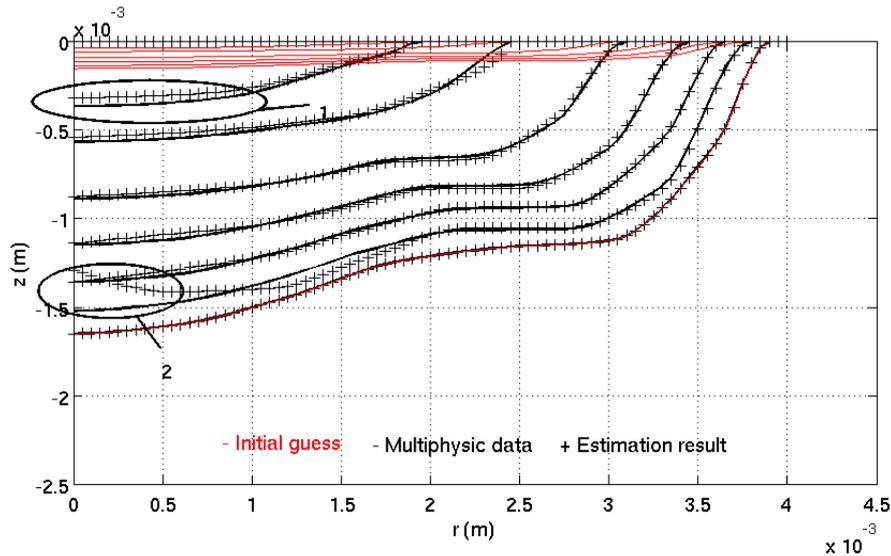


Figure 3.12 – Fronts estimés - méthode de la plus forte pente

Sur la figure 3.12, sont représentés : en rouge, la supposition initiale de positionnement du front ( $k = 0$ ), en croix, les formes estimées, et en trait plein, les positions de référence.

Bien que tout à fait satisfaisantes, les positions du front sont plus éloignées de la référence en deux zones.

La première, identifiée d'un (1) sur la figure correspond à la position de l'interface au premier pas de temps. Ce front, étant obtenu pour des temps courts, est situé loin des mesures de température. Il s'agit donc de la zone où la sensibilité est la plus faible.

La seconde zone (2), elle, correspond au front estimé au dernier pas de temps. L'explication de cette écart tient en deux notions. Premièrement, rappelons que, pour l'instant final, la variable adjointe  $p$  est définie nulle. Donc, pour des temps proches de  $t_{fin}$ ,  $p$  et son gradient dans la direction  $z$  sont faibles. L'évolution de l'estimation de la position du front est donc ralentie pour ces instants. Et, si cette évolution est plus lente, l'erreur entre les températures mesurées et simulées reste importante et donc les sources du problème adjoint sont plus importantes pour les instants finaux. Deuxièmement, la simplification de la simulation impliquait l'utilisation d'interpolation linéaire pour les éléments. Cependant, ce type d'interpolation est trop peu représentative (pour les dimensions de mailles choisies) et associée aux sources du problème adjoint localisées à proximité de l'axe de symétrie, elle entraîne l'incapacité d'annuler le gradient normal (selon  $r$ ). Et finalement, si un gradient selon  $r$  existe, une erreur sur le gradient selon  $z$  est générée. Elle se

### 3.4 Application et résultats

répercute sur le calcul de la direction de descente et donc sur la forme du front estimé en cet instant.

La solution à ce dernier problème est d'utiliser des interpolations d'ordre plus élevé pour les éléments et donc implique une augmentation du temps de calcul. Des éléments quadratiques sont donc un bon compromis. Cependant, les éléments linéaires avaient été choisis pour réduire la singularité numérique générée par l'intersection des deux conditions aux limites situées en surface de la pièce simulée. C'est pour cette raison que les mesures de positions du front en surface de zone fondue sont nécessaires. En effet, si les positions sont justes dès le début de la procédure inverse, les erreurs et donc la sensibilité de l'estimation, sont faibles et les conséquences de ce problème numérique deviennent négligeables.

Pour s'assurer de la justesse de ces précédentes analyses, une résolution du problème inverse est réalisée avec la méthode du gradient conjugué (Ribière et Polak) ré-initialisée et avec des interpolations quadratiques dans les éléments. Le bruit virtuel est aussi ajouté aux températures de référence. La figure 3.13, représente les positions du front estimées pour une valeur de la fonctionnelle résiduelle égale à  $J^*$ .

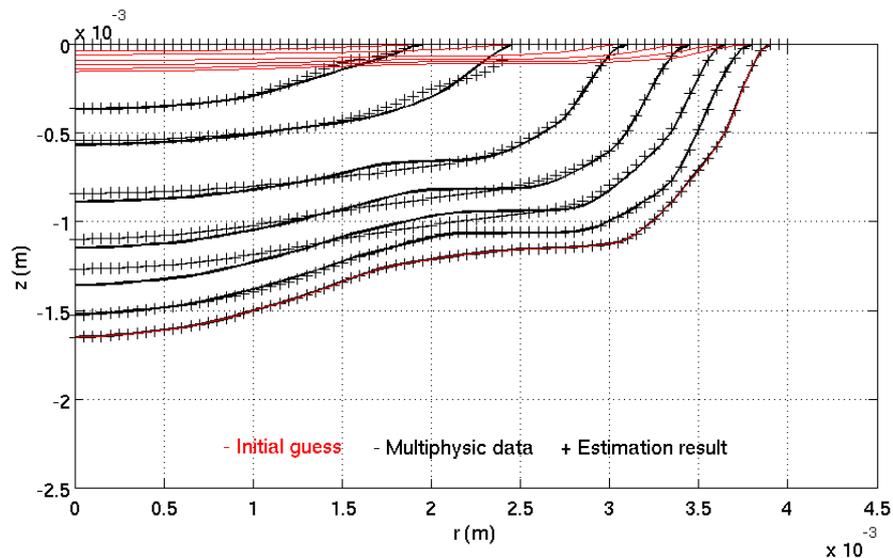


Figure 3.13 – Comparaison du bruit virtuel et expérimental

Dans ce cas, les positions du front estimées sont aussi très satisfaisantes. Il est à noter que l'erreur sur l'axe de symétrie a totalement été annulée. Néanmoins, la fonctionnelle résiduelle n'étant pas nulle, il subsiste un écart entre les résultats de l'estimation et la référence. Ce dernier est distribué de manière homogène sur les positions des fronts en chaque instant (chaque courbe). Dans ce cas, il s'agit donc de l'effet du bruit de mesure et cela ne peut être amélioré numériquement.

### 3.5 Conclusion du Chapitre 3

Dans ce chapitre, une modélisation purement diffusive, visant à ne traiter que les transferts de la chaleur présents dans la phase solide de la pièce, a été construite. Cette simplification repose sur le fait d'imposer le déplacement de l'interface liquide - solide à la température du solidus et donc de modifier la géométrie du domaine simulé au cours du temps par la méthode ALE. L'évolution de cette interface étant issue de la modélisation multiphysique du chapitre 2, cette modélisation est validée à travers une comparaison des champs de température issus des deux approches.

Une méthodologie inverse classique, basée sur la méthode de régularisation itérative, est développée. Cette méthode, s'appuyant sur des algorithmes du type "gradient", implique la définition d'un problème direct, d'un problème en sensibilité, d'un problème adjoint et d'une fonction "objectif" construite sur des écarts quadratiques entre les températures mesurées et simulées. Cependant, dans le problème en sensibilité, où habituellement la sollicitation est une variation du paramètre à estimer, nous avons transformé la variation de l'interface à estimer en une variation de température imposée sur cette même interface qui, dans ce cas, reste fixe au cours d'un pas de temps. De plus, dans l'optique de concevoir une expérience optimale, une paramétrisation de l'interface est proposée et décrite à partir de neuf points de contrôle et une interpolation cubique par morceaux. Cette réflexion vis à vis de l'expérience optimale conduit à utiliser trois types d'information, des températures prises dans le solide, l'évolution de l'interface en surface du bain et la position de l'interface au temps final. Ces deux derniers types d'information sont imposées lors de l'estimation. En effet, la position du front en surface est utilisée afin de réduire l'influence de l'erreur de modélisation et la forme finale du front est nécessaire à l'initialisation du problème adjoint, qui, résolu à rebours, contraint la solution au temps final.

La mise en place de cette méthodologie a été réalisée dans les codes COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> et MATLAB<sup>®</sup>. Plusieurs algorithmes de type "gradient" ont été testés et analysés. Les contraintes imposées par l'utilisation de la méthode ALE ont conduit à privilégier la méthode de la plus forte pente. De plus, cette inversion s'appuyant sur des températures issues d'une modélisation théorique et afin de tester la méthode dans un contexte plus réaliste, un bruit virtuel a été ajouté aux données. Les résultats confirment l'utilisation de la méthode de la plus forte pente et conduisent à valider le critère de la méthode de régularisation itérative. Cependant, cette résolution théorique a permis de mettre en avant certaines difficultés liées à la résolution de ce problème inverse. Notamment le degré d'interpolation dans les éléments a été analysé et défini. De plus, la difficulté à définir les tolérances de convergence de la méthode numérique a été soulignée et devra être prise en compte dans l'inversion des données expérimentales.

Enfin, cette étude inverse théorique a conduit à définir une expérience optimale et à développer des méthodes de mesure appliquées à plusieurs campagnes d'essais.

# Chapitre 4

## ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>126</b>
<b>4.2</b>	<b>Description de l'échantillon</b>	<b>126</b>
<b>4.3</b>	<b>Les méthodes et instruments de mesures</b>	<b>128</b>
4.3.1	Thermocouples type K	128
4.3.2	Camera rapide Phantom V5	130
4.3.3	Macrographies	131
<b>4.4</b>	<b>Première série de mesure</b>	<b>132</b>
4.4.1	Introduction	132
4.4.2	Orientation du flux de chaleur	133
4.4.3	Nombre et position des thermocouples	134
<b>4.5</b>	<b>Procédure expérimentale et installation de soudage</b>	<b>135</b>
<b>4.6</b>	<b>Résultats et analyse</b>	<b>137</b>
4.6.1	Résultats des mesures de température	137
4.6.2	Analyse des températures	139
4.6.3	Résultats des mesures de rayon du bain liquide en surface	141
4.6.4	Résultats des mesures de formes de zones fondues - Macrographies	143
<b>4.7</b>	<b>Deuxième série d'essais - Modifications par rapport à la première série</b>	<b>144</b>
4.7.1	La mesure de température	144
4.7.2	La mesure par caméra rapide	145
4.7.3	La préparation des échantillons et traitement des macrographies	145
4.7.4	Validation de l'axisymétrie de la zone fondue	146
<b>4.8</b>	<b>Résultats et analyse</b>	<b>146</b>
4.8.1	Résultats des mesures de température	147
4.8.2	Résultats des mesures de rayon de zones fondues en surface	149
4.8.3	Résultats des mesures de formes de zones fondues - Macrographies	151
<b>4.9</b>	<b>Conclusion du chapitre 4</b>	<b>152</b>

---

## 4.1 Introduction

La partie expérimentale de ce travail de thèse est effectuée dans le cadre de la collaboration engendrée par le projet BA3 financé par AREVA NP. Deux campagnes d'essais sont réalisées dans les locaux du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (équipe Assemblages Soudés) situés à Nîmes. La préparation des échantillons, l'instrumentation en thermocouples ainsi que l'analyse des essais sont réalisés au sein du laboratoire LIMATB.

L'objectif principal de cette étude expérimentale est de fournir, d'une part des informations au problème inverse précédemment validé théoriquement, et d'autre part, de valider la simulation multiphysique.

Concernant l'inversion, il a été montré que, pour réaliser l'estimation de l'évolution du front de fusion, l'acquisition de trois types d'information est nécessaire :

- La première information est l'évolution de la température relevée dans la phase solide de l'échantillon. Le fait de chercher la position du front impose de positionner les capteurs le plus proche possible de la zone fondue afin de conserver des sensibilités suffisantes. Pour ce faire, sont réalisés des essais de durées différentes avec des instrumentations optimisées dans chaque cas.
- La seconde information est le rayon de la zone fondue observée en surface par une caméra rapide. La difficulté pour cette acquisition concerne le plasma qui a tendance à occulter, par son fort rayonnement, la zone fondue. Un filtrage optique est donc nécessaire.
- La troisième information est la forme de la zone fondue à l'instant final. Cette forme est observable sur les coupes macrographiques de chaque essai. Donc, en plus de fournir la géométrie maximale du front de fusion, cette méthode permet d'obtenir des formes de référence à des temps intermédiaires.

Rappelons que les données mesurées, nécessaires à la résolution du problème inverse, seront utilisées dans la validation de la simulation multiphysique. La définition du contexte expérimental doit donc être similaire aux deux études numériques.

Ce chapitre débute par une présentation de l'échantillon. Ensuite, les instruments de mesures, l'installation complète ainsi que la procédure expérimentale sont décrits. Les résultats obtenus pour deux séries d'essais sont présentés, commentés, comparés puis analysés. Pour finir, une conclusion, sur les difficultés ainsi que les points d'incertitudes, est effectuée.

## 4.2 Description de l'échantillon

L'échantillon est un disque d'acier inoxydable 316L(N), dont les dimensions initiales sont : 160 *mm* de diamètre et 13,7 *mm* d'épaisseur.

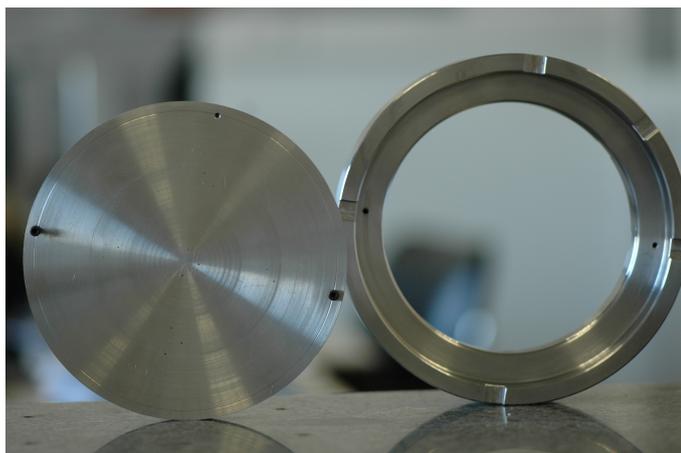


Figure 4.1 – Échantillon et support (vue de dessus)

La figure 4.1 présente l'échantillon sur sa partie gauche et le support sur la partie droite. Ce support est ajouté à la pièce pour protéger la future instrumentation principalement positionnée sur la face inférieure. Son effet sur la géométrie du bain fondu est négligé suite à des vérifications réalisées à l'aide de la version simplifiée de la simulation multiphysique.

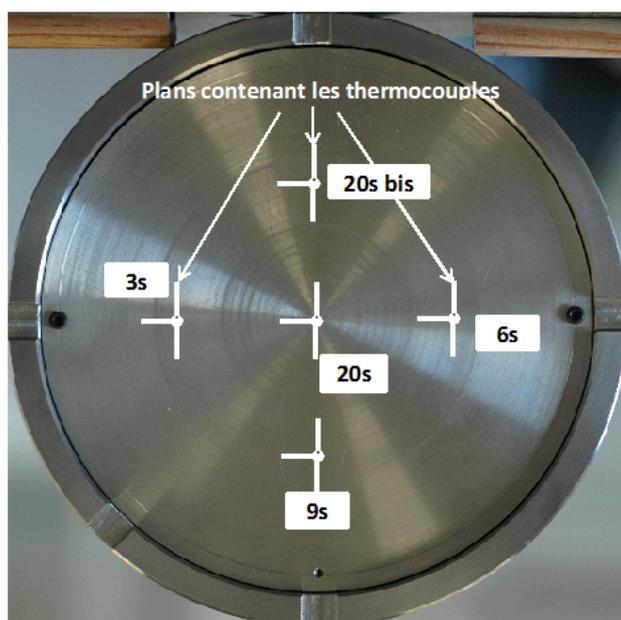


Figure 4.2 – Localisation des essais de durées 3 s, 6 s, 9 s et 20 s et prévision des positionnements des thermocouples (vue de dessus)

La taille de l'échantillon ( $\Phi = 160 \text{ mm}$ ) permet d'envisager, lors de la même campagne, plusieurs essais dont les diamètres de zones fondues ne dépassent pas  $10 \text{ mm}$ . Dans une première partie de l'étude, cinq essais de durées respectives : 3 s, 6 s, 9 s, et deux fois 20 s sont réalisés. Un essai de 20 s est effectué au centre du disque et les quatre autres sont distribués sur un rayon de 40 mm (figure 4.2). Dans une seconde partie, cinq essais sont aussi instrumentés : deux de 9 s et trois de 20 s. Deux tirs supplémentaires non instrumentés de 3 s et 20 s sont effectués

en marge des précédents essais. Davantage d'information est donnée, sur les raisons de ces deux campagnes, dans la suite de ce chapitre.

Sur la photographie de l'échantillon (figure 4.2), sont affichés les "plans contenant les thermocouples". En effet, les thermocouples sont placés de façon à éviter de perturber la diffusion de la chaleur tout en facilitant la future découpe pour l'observation macrographique. Ce choix de positionnement repose sur l'hypothèse d'avoir une zone fondue axisymétrique car numériquement ces "plans d'instrumentation" sont superposés.

Par exemple, une coupe verticale passant par les essais 20sbis, 20s et 9s (figure 4.2) permet, par une unique coupe, d'obtenir les zones fondues ainsi que les positions de thermocouples (figure 4.3) des trois essais.

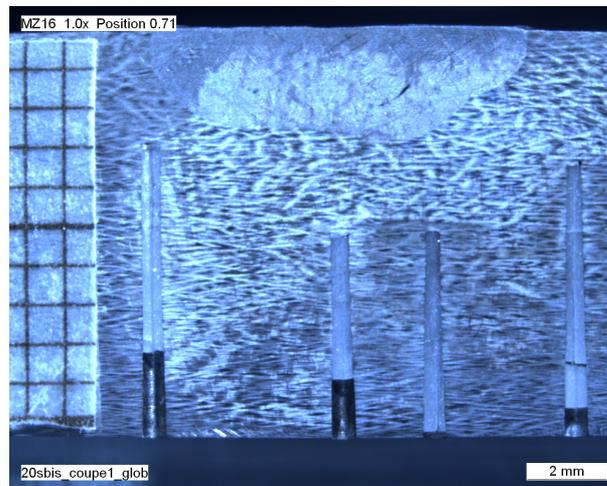


Figure 4.3 – Exemple de plan de coupe

## 4.3 Les méthodes et instruments de mesures

### 4.3.1 Thermocouples type K

Les mesures de température sont effectuées à l'aide de thermocouples de type K (chromel-alumel) préparés au sein du laboratoire et dont le diamètre des fils est de  $50 \mu m$  pour un diamètre de soudure chaude, la "boule" du thermocouple, approximativement égale à  $220 \mu m$ . Ces capteurs sont positionnés au plus près de la zone fondue au fond de perçages de  $650 \mu m$  de diamètre. Ces perçages sont réalisés, pour la majorité, à partir de la face arrière de l'échantillon. Pour définir la position de ces capteurs, il est nécessaire de connaître la position maximale de la zone fondue.

De précédents essais non-instrumentés ont permis de connaître, après observations des macrographies, les dimensions de la zone fondue à l'issue de quatre tirs de durées différentes : 3s (figure 4.4), 6s (figure 4.5), 9s (figure 4.6) et 20s (figure 4.7). Ces essais sont qualifiés de "préliminaires" dans la suite de ce document.

Sur les figures 4.4 à 4.7, il est à noter que la forme de la zone fondue est assez complexe.



Figure 4.4 – Macrographie pour un tir de 3 s

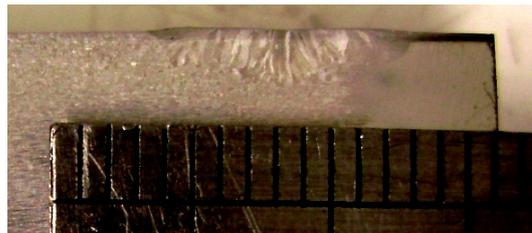


Figure 4.5 – Macrographie pour un tir de 6 s



Figure 4.6 – Macrographie pour un tir de 9 s



Figure 4.7 – Macrographie pour un tir de 20 s

Les singularités observables sur les pourtours du bain de fusion sont, en fait, le résultat de l'effet Marangoni présenté dans le chapitre 2.

Les thermocouples sont soudés par décharge capacitive au fond des perçages (figure 4.8). Lors de l'évacuation des fils, le contact électrique est évité en les insérant dans les deux trous d'une tige d'alumine. En dehors de la pièce, des gaines isolantes sont utilisées. Une colle céramique résistante aux hautes températures est appliquée à la sortie des perçages afin de rigidifier l'ensemble (figure 4.9).

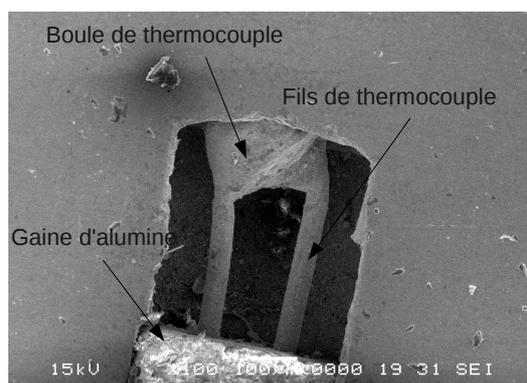


Figure 4.8 – Observation MEB d'un thermocouple soudé

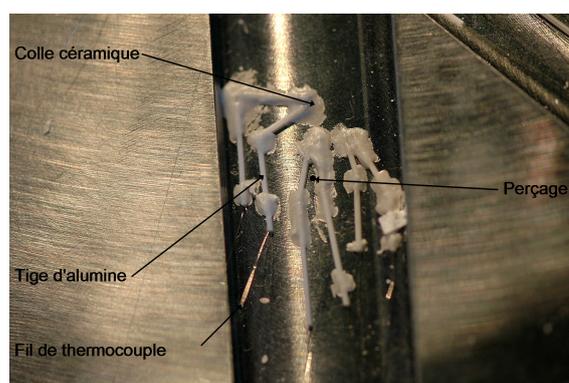


Figure 4.9 – Collage des tiges d'alumine en face arrière de l'échantillon

À noter que l'installation des thermocouples constitue une étape délicate de l'instrumentation, en raison, notamment de fils de faible diamètre. Le positionnement et la méthodologie d'instrumentation ont été établis en concertation avec le technicien du laboratoire, en charge de cette instrumentation. Après cette phase d'instrumentation, le système d'acquisition et tous les thermocouples sont testés pour confirmer leur fonctionnement.

### 4.3.2 Camera rapide Phantom V5

Afin de mesurer l'évolution de la taille du bain liquide en surface, des observations à l'aide d'une caméra rapide Phantom V5 sont réalisées. Cette caméra est qualifiée de "rapide" en raison de sa fréquence d'acquisition particulièrement élevée (maximum  $10k Hz$ ). Cette fréquence varie en fonction de la résolution des images ou de la durée d'acquisition. Néanmoins, dans notre configuration expérimentale, la durée des essais étant au maximum de 20 s et sachant que les images sont composées de  $512 \times 512$  pixels, l'acquisition se fait à une fréquence de 100 Hz.

De plus, l'observation est effectuée dans des conditions particulièrement difficiles. L'élément à observer est la dimension du bain en surface. Or, le plasma qui est au centre de la zone fondue a tendance à l'occulter. En effet, le niveau de température du plasma est tellement important (de l'ordre de  $20000K$ ) que le flux lumineux émis est supérieur à la valeur maximale mesurable par la caméra et une saturation apparaît sur l'image enregistrée.

Deux solutions complémentaires sont appliquées pour limiter cet effet. La première solution consiste à ajouter un filtre sur l'objectif de la caméra. Ce filtre agit de la même manière qu'un filtre : passe-bas, passe-haut ou passe-bande, mais sur les fréquences des ondes électromagnétiques. Dans cette étude expérimentale, le filtre utilisé est de couleur rouge pour réduire l'effet du plasma. La seconde solution est l'application d'une source lumineuse additionnelle. En effet, les images initiales que doit acquérir la caméra sont distribuées spatialement sur une trop grande plage d'intensité lumineuse : d'une intensité quasiment nulle pour les contours de l'image (la partie non soudée de la pièce) à une intensité très élevée sur le plasma. Pour cette raison, le niveau bas de cette plage est remonté par l'ajout d'une lampe halogène.

La position de cette caméra dans le dispositif expérimental est présentée sur la figure 4.10.



Figure 4.10 – Positionnement de la caméra

#### 4.3.3 Macrographies

Les macrographies ou coupes macrographiques sont obtenues après plusieurs étapes de préparation :

- **La découpe** est une étape de mise en forme de l'échantillon pour les prochaines étapes. Les différents essais étant réalisés sur le même échantillon, il faut tout d'abord les isoler. Ensuite, une découpe plus précise est réalisée dans le plan qui va être observé. Dans le cas présent, il s'agit d'une coupe selon le diamètre de la zone fondue.

Remarque : plusieurs types de matériels peuvent être utilisés pour réaliser cette opération, citons trois méthodes pour exemples : l'utilisation d'une tronçonneuse à disque (utilisée dans le cas présent), la découpe par jet d'eau ou encore l'électroérosion par fil. Pour conserver un état de surface satisfaisant, les coupes diamétrales des zones fondues sont réalisées par une tronçonneuse à disque et sont ensuite rectifiées.

- **L'enrobage** n'est pas une étape indispensable, cependant, elle facilite le polissage. Durant cette phase, la partie de l'échantillon à observer est introduite dans une résine polymère qui, en se solidifiant, prend la forme d'un cylindre de dimension donnée. Ainsi, toutes les faces intéressantes pour la suite de l'analyse sont conditionnées sous la même forme.

Remarque : Pour le traitement des essais de la première campagne expérimentale, cette méthode de conditionnement des échantillons n'est pas appliquée mais elle le sera dans la seconde partie de l'étude expérimentale.

- **Le polissage** est dans le cas présent manuel mais peut être automatisé (grâce à l'enrobage). Cette étape consiste à éliminer les aspérités de la surface d'intérêt et cela par des polissages successifs. L'utilisation de disques abrasifs de plus en plus fins permet de rendre l'état de surface propice à la future attaque chimique.

Remarque : Le protocole de polissage dépend du matériau concerné et du niveau de finition souhaité. Pour l'acier inoxydable concerné par notre étude, les étapes sont les suivantes : des disques pour matériau ferreux numéroté 600 et 1200 sous eau pour éliminer les rayures les plus profondes. Ensuite, des suspensions diamantées de  $9\ \mu\text{m}$ ,  $6\ \mu\text{m}$  et  $1\ \mu\text{m}$  permettent d'obtenir une rugosité suffisamment faible pour ne pas perturber la future observation de la structure granulaire du métal.

- **L'attaque chimique** comme son nom l'indique, revient à attaquer une partie de la structure du métal (grains ou joints de grain). Les géométries des grains dans le métal de base et dans la zone ayant fondue étant différentes, ces deux parties peuvent être distinguées l'une de l'autre. Dans le cas présent, comme l'illustre la figure 4.11, des structures lamellaires sont observées dans la zone solidifiée et des structures équiaxes dans le métal de base.

Remarque : Le caractère inoxydable de l'acier étudié ici, en fait un matériau particulièrement difficile à attaquer chimiquement. Il existe cependant certains acides dont l'efficacité est validée. Par exemple, et pour n'en citer que deux : le perchlorate de fer [36] ou l'eau régale [2]. Pour cette étude, le perchlorate de fer (15 s d'attaque) est utilisé pour les premiers essais et l'eau régale (10 s d'attaque) pour les seconds.

Finalement, la macrographie (figure 4.11) est le cliché de la zone d'intérêt après attaque chimique.



Figure 4.11 – Exemple de macrographie

## 4.4 Première série de mesure

### 4.4.1 Introduction

Les mesures de température sont des données primordiales pour la réussite de l'inversion. Du fait de la diffusion thermique, des mesures réalisées trop loin de la limite de zone fondue (l'estimé) seront atténuées en amplitude et retardées dans le temps. Aussi, cette perte de sensibilité aura tendance à entraîner des formes de fronts estimés moins détaillées que la réalité.

Les thermocouples utilisés dans cette étude sont de type K (**Chromel** : 80% de nickel et 20% de Chrome et **Alumel** : 95% de nickel, 2% d'aluminium, 2% de manganèse et 1% de silicium).

Les thermocouples sont étalonnés pour une plage de température donnée. Ceux de type K sont particulièrement utilisés pour la stabilité de leur sensibilité sur une large gamme de température : de  $-270\text{ }^{\circ}\text{C}$  à  $1372\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Néanmoins, en raison de problème de dégradation du capteur à haute température (plus la température atteinte est haute, plus la durée d'utilisation du capteur est limitée), ils ne seront utilisés dans le cadre de notre étude, que jusque  $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . En d'autres termes, les études numérique et expérimentale préliminaires doivent permettre de définir les zones ne dépassant pas  $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### 4.4.2 Orientation du flux de chaleur

Afin de positionner ces instruments de manière optimale, il est nécessaire de connaître la direction du flux de chaleur dans la pièce. Pour ce faire, une méthode qualitative permet de juger de l'influence de la convection vis à vis de la diffusion. Il s'agit de la détermination du nombre sans dimension de *Biot* (Équation 4.1) construit comme le rapport de la résistance de conduction sur la résistance de convection.

$$Bi = \frac{R_{conduction}}{R_{convection}} = \frac{hL}{\lambda_{moy}} \quad (4.1)$$

Où  $h$  est le coefficient d'échange par convection, ici  $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  (chapitre 1).  $L$  est la longueur caractéristique de la pièce, deux valeurs sont considérées :  $L_1 = 0,08 \text{ m}$  pour le tir au centre du disque et  $L_2 = 0,04 \text{ m}$  pour les tirs en périphérie.  $\lambda_{moy}$  est une valeur moyenne de la conductivité thermique du métal  $\lambda_{moy} = 25 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Dans ce contexte, les valeurs du nombre de *Biot* obtenues sont  $Bi_1 = 0,032$  et  $Bi_2 = 0,016$ . Les valeurs de  $Bi$  étant inférieures à 0,1, la matière est donc le siège des transferts de la chaleur, ce qui signifie ici que les lignes de flux sont orientées dans le sens de la longueur, ici le rayon.

Les renseignements donnés par le calcul précédent ne sont valables que sur l'ensemble de la pièce. Pour obtenir des informations à proximité de la zone fondue, une simulation multiphysique simplifiée (thermique et mécanique des fluides) est utilisée. Cette dernière est conditionnée pour présenter une forme de zone fondue, à l'instant final, proche de celle observée sur la macrographie correspondante des essais préliminaires (figure 4.7).

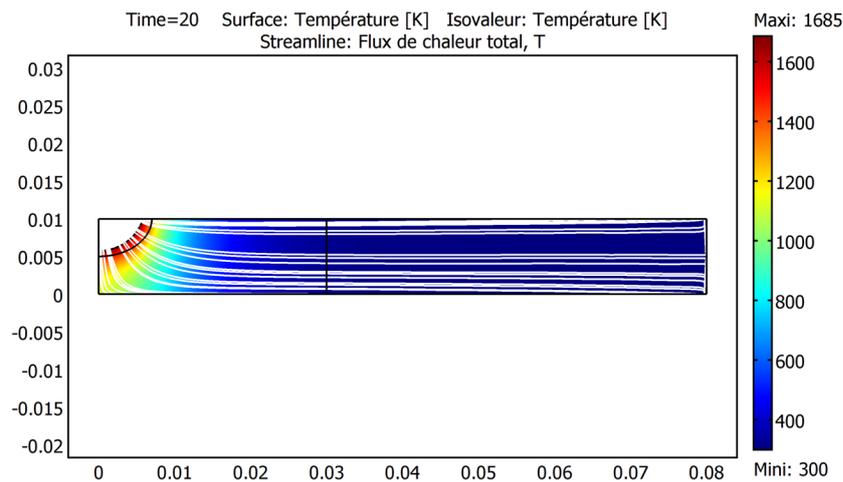


Figure 4.12 – Orientation des lignes de flux et champs de température à  $t = 20 \text{ s}$

La figure 4.12 montre que l'hypothèse concernant la prépondérance de la diffusion n'est valable qu'à une certaine distance de la ligne isotherme représentant le front de fusion (0,01 m). En effet, étant donné que, dans la phase solide, les lignes de flux sont normales aux isothermes, à proximité de la limite de zone fondue, ces dernières ne peuvent être parfaitement parallèles à

l'axe  $r$ .

Bien que simplifiée, cette simulation permet d'avoir une image de l'orientation des flux, et donc de positionner correctement les thermocouples pour qu'ils puissent enregistrer des informations pertinentes en vue de l'estimation de la position du bain liquide.

#### 4.4.3 Nombre et position des thermocouples

Numériquement, il a été montré précédemment que sept thermocouples (en fonction de la paramétrisation) permettent d'estimer correctement l'évolution du front. Pour pallier aux imprévisibles expérimentaux, ce nombre de mesures est augmenté pour chaque essai (tableau 4.1). Il est à noter que davantage de thermocouples sont présents pour les longues durées.

Durée du tir	3s	6s	9s	20s	20s bis
Nombre de TC	8	8	9	10	10

Tableau 4.1 – Nombre de thermocouples par tir

L'intérêt de réaliser des essais de différentes durées est de pouvoir leur associer une instrumentation différente. Cependant, les observations effectuées sur l'orientation des lignes de flux et les formes de zones fondues observées sur les macrographies, nous amènent à établir un schéma d'instrumentation commun à tous les essais. Comme l'illustre la figure 4.13, pour obtenir des informations sur l'ensemble de la zone fondue, trois zones de mesure sont identifiées. La première est située en surface de la pièce et donne une image de la largeur de la zone fondue. Des perçages à partir de la surface de la pièce sont effectués selon un angle de  $45^\circ$  pour instrumenter cette zone. La seconde, localisée au sein de la pièce, permet d'obtenir une image de la forme du bain liquide dans sa partie intermédiaire. Dans ce cas, l'instrumentation est réalisée à partir de la face arrière. La troisième est positionnée sous la zone fondue et permet la détermination de la profondeur de pénétration. Pour cette zone, les capteurs proviennent également de la face inférieure. Les influences respectives des directions d'instrumentation sur les champs thermiques seront donc différentes.

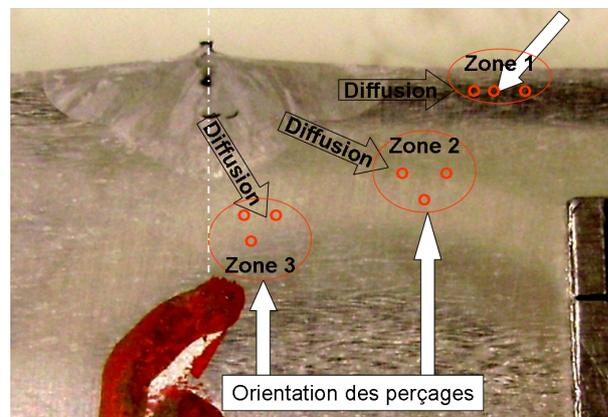


Figure 4.13 – Stratégie d'instrumentation en thermocouples

Notons dès à présent que les perçages de la zone 3 sont réalisés dans le sens du flux, ce qui est

## 4.5 Procédure expérimentale et installation de soudage

le cas le plus défavorable en terme de perturbation de la mesure. N'ayant pas d'autre possibilité, nous en étudierons les conséquences dans le chapitre 5.

La figure 4.14 illustre l'origine du repère pour les coordonnées des points de mesure présentées dans le tableau 4.2.

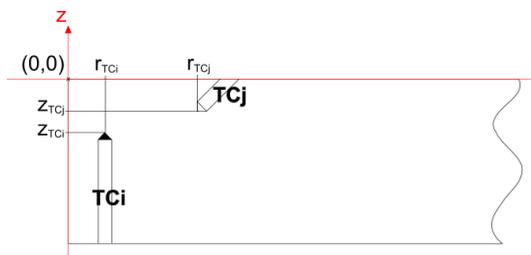


Figure 4.14 – Référentiel pour le positionnement des points de mesure

### Essai 3s

Nom TC	TC 3-1	TC 3-2	TC 3-3	TC 3-4	TC 3-5	TC 3-6	TC 3-7	TC 3-8
r (mm)	0,5	4,3	0,9	3,8	1,3	4,3	5,2	4,5
z (mm)	-2,75	-1,65	-3,05	-1,65	-2,65	-1,35	-0,5	-0,5

### Essai 6s

Nom TC	TC 6-1	TC 6-2	TC 6-3	TC 6-4	TC 6-5	TC 6-6	TC 6-7	TC 6-8
r (mm)	1	5,6	2	0,5	5,6	4,9	5,9	6,4
z (mm)	-4,05	-1,55	-3,25	-3,35	-1,95	-2,05	-0,5	-0,5

### Essai 9s

Nom TC	TC 9-1	TC 9-2	TC 9-3	TC 9-4	TC 9-5	TC 9-6	TC 9-7	TC 9-8	TC 9-9
r (mm)	4,8	3,5	0,7	1,1	3,8	4,8	5	5,4	5,2
z (mm)	-1,15	-2,75	-3,35	-3,85	-2,45	-1,65	-0,5	-0,5	-0,5

### Essai 20s

Nom TC	TC 20-1	TC 20-2	TC 20-3	TC 20-4	TC 20-5	TC 20-6	TC 20-7
r (mm)	5,3	1,7	0,5	5,3	1,1	3,8	5,3
z (mm)	-2,45	-4,65	-5,35	-2,45	-5,85	-2,45	-2,95
Nom TC	TC 20-8	TC 20-9	TC 20-10				
r (mm)	6,4	5,8	6,2				
z (mm)	-0,5	-0,5	-0,5				

### Essai 20s bis

Nom TC	TC 20-1	TC 20-2	TC 20-3	TC 20-4	TC 20-5	TC 20-6	TC 20-7
r (mm)	5,3	1,1	5,3	3,8	1,7	5,3	0,5
z (mm)	-2,45	-5,85	-2,95	-2,45	-4,65	-2,25	-4,7
Nom TC	TC 20-8	TC 20-9	TC 20-10				
r (mm)	6,4	5,8	6,2				
z (mm)	-0,5	-0,5	-0,5				

Tableau 4.2 – Positionnement théorique des thermocouples de la première série de mesure

## 4.5 Procédure expérimentale et installation de soudage

Les essais de soudage ont été réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Nîmes (première campagne en juin 2009, seconde campagne en avril 2011).

Afin de maîtriser l'ensemble des paramètres intervenant lors des essais, une procédure expérimentale est à définir :

1. Réglages des paramètres procédé adéquats (tension, courant, débit de gaz, ...).
2. Test sur une cible "martyr" similaire à l'échantillon et :
  - ajustement de la position de la caméra et des paramètres d'acquisition vidéo,
  - mesure du niveau de bruit sur les signaux de températures et test d'acquisition,
  - validation de la position de la masse du circuit électrique.
3. Centrage de l'électrode sur un repère présent sur l'échantillon (léger marquage par fraisage).
4. Mise en contact de l'électrode avec la pièce (allumage par contact-retrait).
5. Déclenchement des acquisitions (température et vidéo).
6. Démarrage de l'essai.
7. Refroidissement de l'ensemble jusqu'à environ 30 °C.
8. Retour à l'étape 3 pour l'essai suivant.

La figure 4.15 présente le dispositif expérimental utilisé dans cette étude.

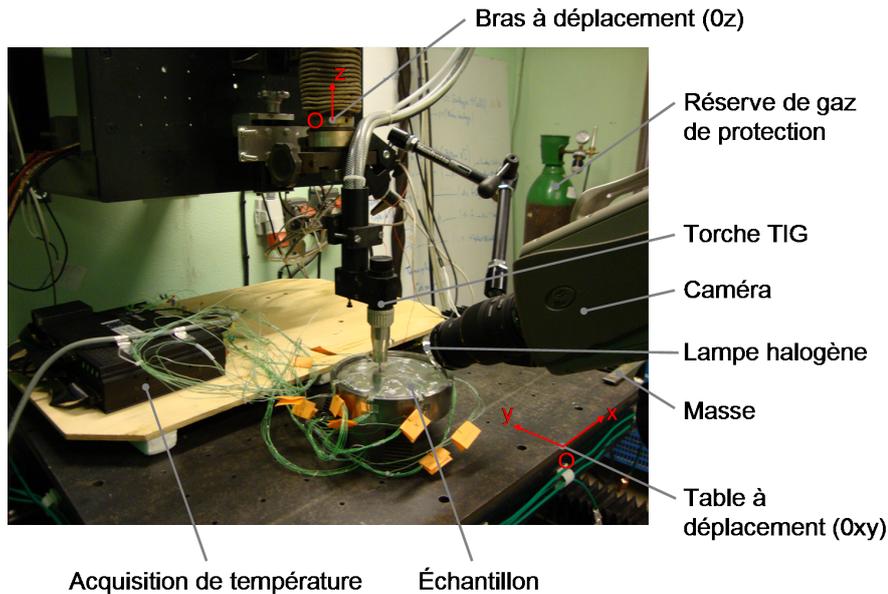


Figure 4.15 – Présentation de l'installation complète

Ce cas d'étude étant simplifié (tirs statiques), le déplacement horizontal de la table n'est donc pas utilisé. En revanche, le déplacement vertical sert à l'allumage de l'arc ainsi qu'à la gestion de la hauteur d'arc. Pour ce faire, une initialisation de la position de la pièce à souder est nécessaire et en définissant la durée de remontée, il est possible d'imposer la distance entre l'électrode et la pièce. Dans le cas présent, pour une hauteur d'arc de 1,2 mm, la durée de remontée est d'environ 0,3 s.

Notons que sur la figure 4.15, les postes informatiques de gestion du procédé, l'alimentation du procédé ainsi que les instruments de mesures de tension et de courant ne sont pas présentés.

## 4.6 Résultats et analyse

### 4.6.1 Résultats des mesures de température

Il est à noter qu'un thermocouple : le "TC 3-2" était défaillant dès le début de l'essai de 3s. Afin de ne pas surcharger les représentations graphiques des résultats, la courbe correspondante n'est pas présentée sur la figure 4.16.

Pour la même raison, sur l'ensemble des figures 4.16 à 4.20, certaines courbes sont interrompues. En effet, pour chaque essai, des instruments de mesure ont fourni un signal incohérent lors de la montée en température.

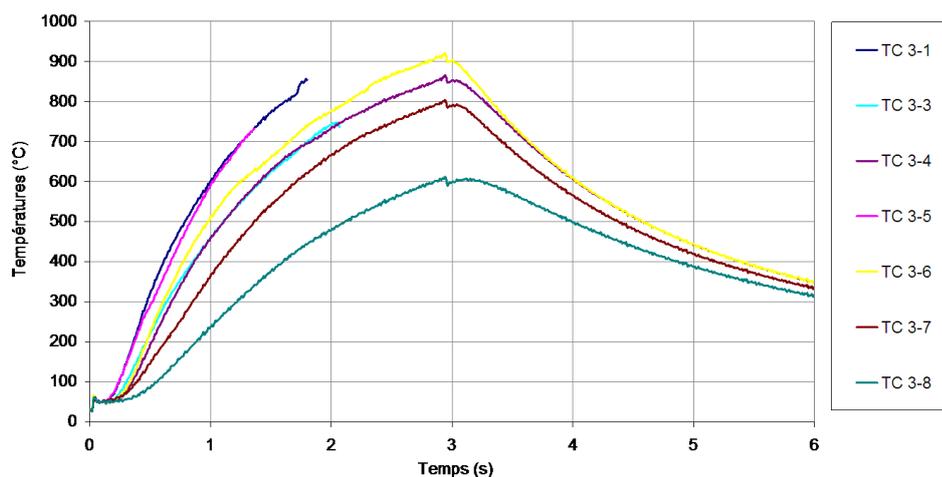


Figure 4.16 – Évolution des températures mesurées par thermocouple - essai 3s1

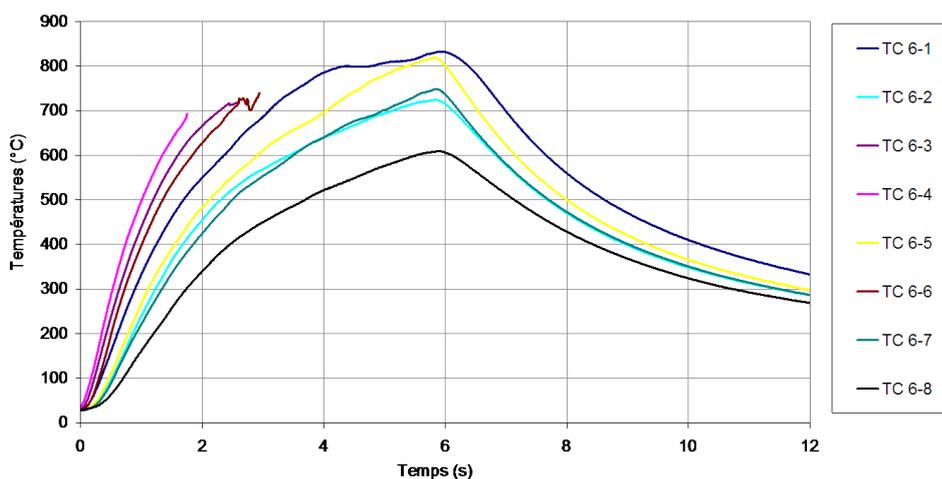


Figure 4.17 – Évolution des températures mesurées par thermocouple - essai 6s1

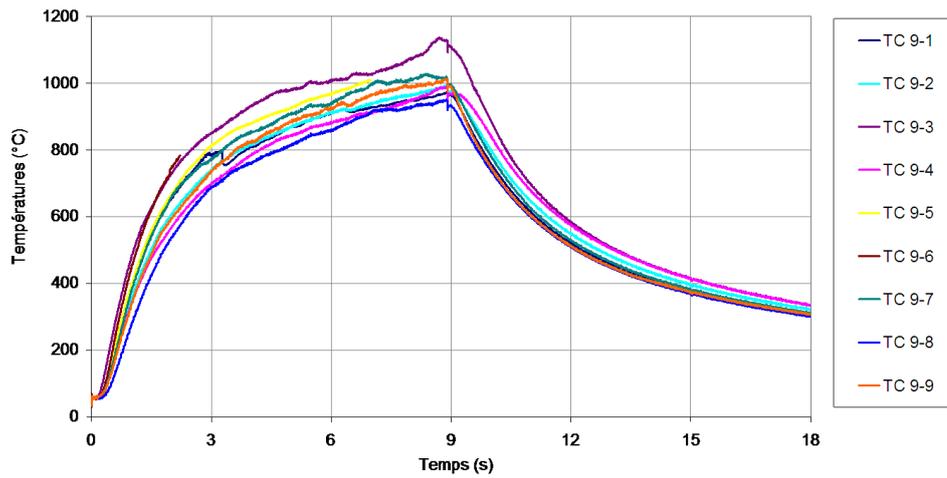


Figure 4.18 – Évolution des températures mesurées par thermocouple - essai 9s1

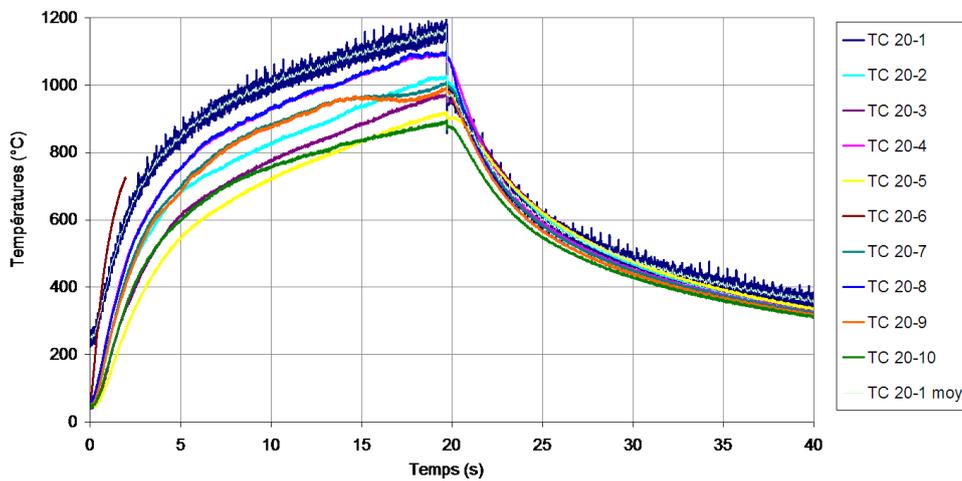


Figure 4.19 – Évolution des températures mesurées par thermocouple - essai 20s1

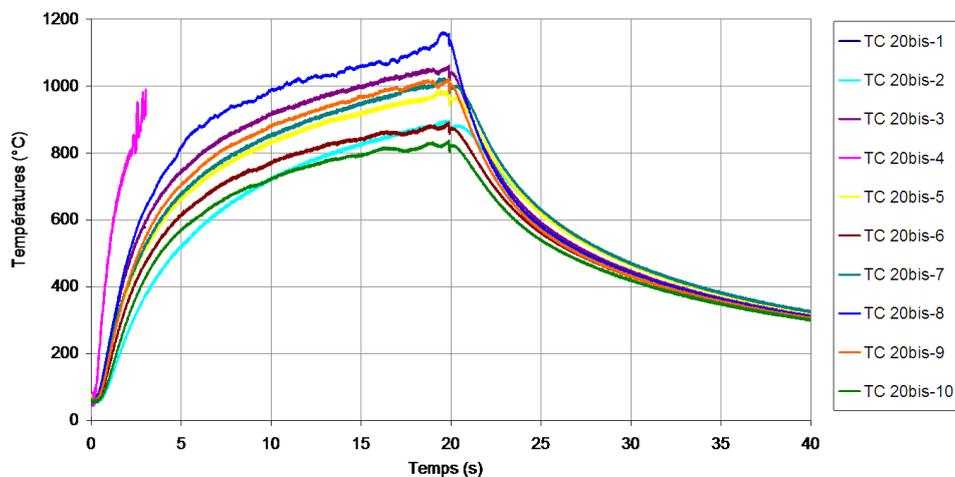


Figure 4.20 – Évolution des températures mesurées par thermocouple - essai 20sbis1

Sur ces figures, plusieurs anomalies sont à observer :

- les ruptures de signaux sans raison apparente,
- les augmentations et réductions subites de la température lors de l’allumage et de l’extinction de l’arc,
- une chute de température mesurée lors de l’essai de 9s (figure 4.18 TC 9-1),
- un signal est particulièrement perturbé par du bruit de mesure (figure 4.19).

### 4.6.2 Analyse des températures

Avant d’émettre des hypothèses quant aux phénomènes responsables de ces quelques problèmes, il est tout d’abord nécessaire de détailler les observations de chacun d’eux.

#### 4.6.2.1 Rupture du signal mesuré.

Trois types de rupture du signal peuvent être observés, la figure 4.21 illustre chacun d’eux.

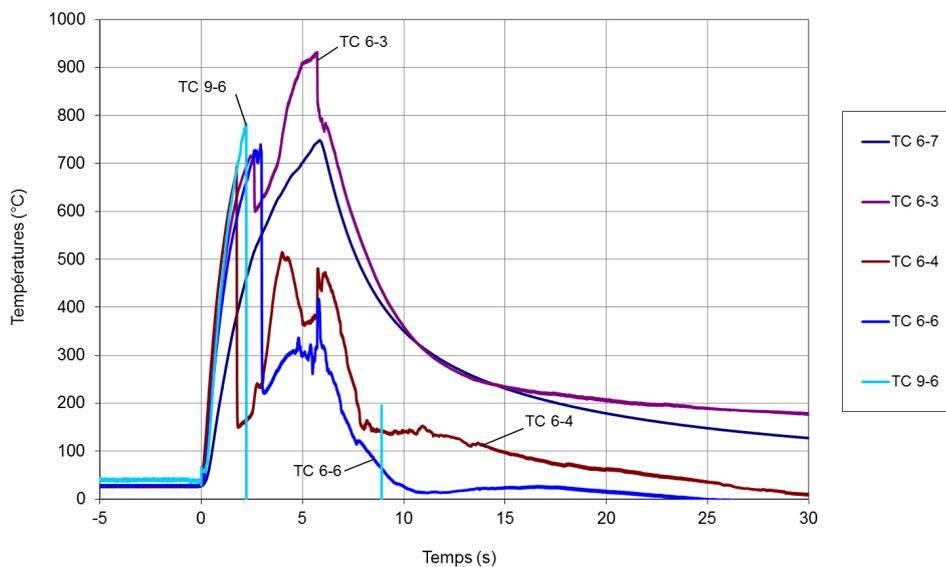


Figure 4.21 – Illustration des trois types de rupture du signal

Pour le premier type, prenons pour exemple l’évolution de température mesurée par le thermocouple TC 6-3 (tableau 4.2 et figure 4.21). La rupture est caractérisée par une chute de température d’environ 100 °C qui a lieu aux alentours de 728 °C. Ensuite, la température reprend une évolution similaire à celle obtenue par d’autres thermocouples. Néanmoins, cette évolution se fait avec un retard. Finalement, après extinction de l’arc, la température mesurée par ce thermocouple débute par une évolution plus rapide et ensuite plus lente que celles présentées par les instruments ayant fonctionné correctement.

L'ensemble de ces remarques est cohérent avec la destruction locale d'une partie du thermocouple. En effet, lors du soudage, les déformations thermo-mécaniques subies par l'échantillon ne sont pas forcément transmises au thermocouple, ce dernier étant contraint par la gaine d'alumine. Le thermocouple ne peut se briser qu'en deux endroits : la jonction entre le thermocouple et l'échantillon ou la zone de liaison entre les fils et la "boule" du thermocouple.

Pour le second type, considérons les thermocouples TC 6-4 et TC 6-6 (figure 4.21) dont les évolutions de température mesurées sont relativement semblables. Pour ces deux courbes, les ruptures se produisent pour des températures proches de  $700\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Les chutes de température sont de l'ordre de  $500\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Durant le reste de la durée d'application de l'arc, lorsque la température devrait être croissante, les signaux mesurés sont incohérents. En revanche, lors de l'extinction de l'arc, les températures, bien que d'amplitudes erronées, présentent des évolutions temporelles dont les allures sont semblables à celles observées avec des thermocouples sans problème.

La chute de température observée lors de l'essai de 9 s sur le thermocouple 9-1, semble être la conséquence d'une forme atténuée de ce problème. En effet, après l'arrêt de l'arc, l'évolution de la température ne présente pas de retard (caractéristique de la rupture mécanique).

Dans ce cas, les effets observés sont assimilables à des effets électromagnétiques. Rappelons que la mesure par thermocouple est une mesure de force électromotrice. Or, pour le procédé étudié, l'amplitude de l'intensité du courant électrique est importante ( $I = 150\text{ A}$ ) et ce fort courant est source d'un champ magnétique. Suivant l'orientation des fils de thermocouples, ils peuvent être le siège d'un courant induit et donc transmettre des informations erronées concernant la température qu'ils ont mesurée. Une autre possibilité qui peut être envisagée pour expliquer ces problèmes est une remontée de courant à travers la centrale d'acquisition. En effet, les thermocouples ayant posé un problème sont les plus proches de l'apport d'énergie, dans des zones où la densité de courant est encore importante. Cette dernière hypothèse est la plus vraisemblable étant donné le positionnement orthogonal des fils de thermocouple par rapport au champ magnétique (évitant les courants induits dans les fils de TC).

Le troisième type de problème est une interruption nette dans l'évolution de la température mesurée et une stagnation à une valeur incohérente ( $-3000\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), par exemple le TC 9-6 de la figure 4.21. Notons que cette valeur est caractéristique d'une rupture de fil de thermocouple.

Notons néanmoins, qu'avant sa rupture, le signal ne présente aucune particularité et que les signaux sont globalement faiblement bruités, les  $\frac{2}{3}$  des mesures semblent utilisables sur toute la durée de soudage et l'information reste disponible même pour les mesures interrompues.

#### 4.6.2.2 Augmentation et réduction des températures mesurées lors de l'allumage et de l'extinction de l'arc.

Cet effet est une illustration directe de l'influence que peut avoir le courant électrique présent dans la pièce sur la mesure par thermocouple. Par exemple, la figure 4.22 illustre l'importance de cette erreur (environ  $-3^{\circ}\text{C}$  pour un courant de  $-20\text{ A}$ ). Durant la phase de montée en tem-

pérature, l'erreur est plus difficile à quantifier. Néanmoins, en sachant que les thermocouples de type K ont une sensibilité ( $\frac{dV}{dT}$ ), liée au coefficient de Seebeck, variant peu en fonction de la température (pour la plage considérée), une correction peut être apportée en fonction du courant appliqué (figure 4.23).

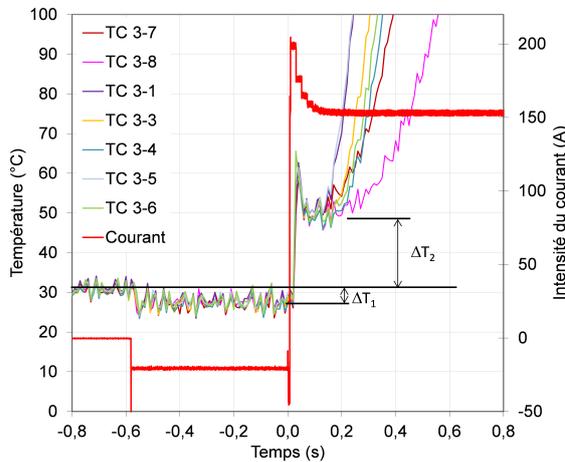


Figure 4.22 – Illustration des effets du courant sur la température mesurée

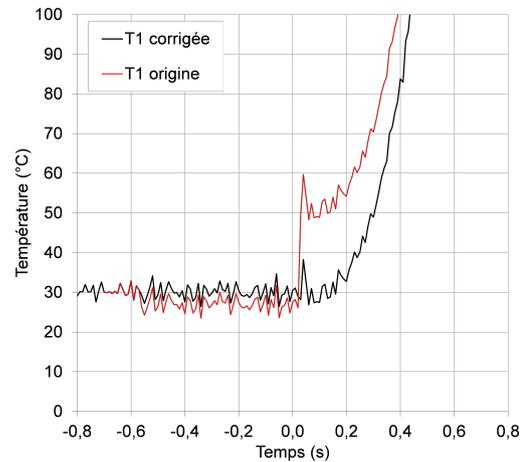


Figure 4.23 – Résultat après correction - exemple mesure par TC 3-1

### 4.6.2.3 Bruit de mesure anormal sur le signal observé par le thermocouple 20-1

Le capteur de mesure n'est pas situé particulièrement à proximité de l'apport d'énergie et l'évacuation des fils n'est pas différente des autres. Il s'agit donc d'une singularité ponctuelle qui peut être engendrée par la défaillance de l'isolation d'un fil.

### 4.6.3 Résultats des mesures de rayon du bain liquide en surface

Les mesures de rayon sont effectuées par observation directe de la largeur du bain liquide, et cela, en fonction du temps. En utilisant un outil (ici MATLAB<sup>®</sup>) avec lequel les coordonnées de chaque pixel est accessible, il est possible de détecter les positions de l'interface liquide - solide. Connaissant les dimensions de l'électrode, les dimensions du bain sont donc obtenues. Compte tenu de l'inclinaison de la caméra, cette mesure directe n'est valable que dans le plan de l'électrode.

Sur la figure 4.24, qui illustre le type de données traitées, trois étapes sont représentées. Durant la première phase (Fig. 4.24 (a)), correspondant à l'allumage de l'arc et à la stabilisation du plasma, l'interface est occultée par le plasma. La mesure de la position du front est donc particulièrement entachée d'incertitude ( $\pm 0,2 \text{ mm}$  sur la valeur du rayon). Au cours de la phase (figure 4.24 (b)), le bain est clairement visible. La mesure de sa position peut se faire à 1 *pixel*

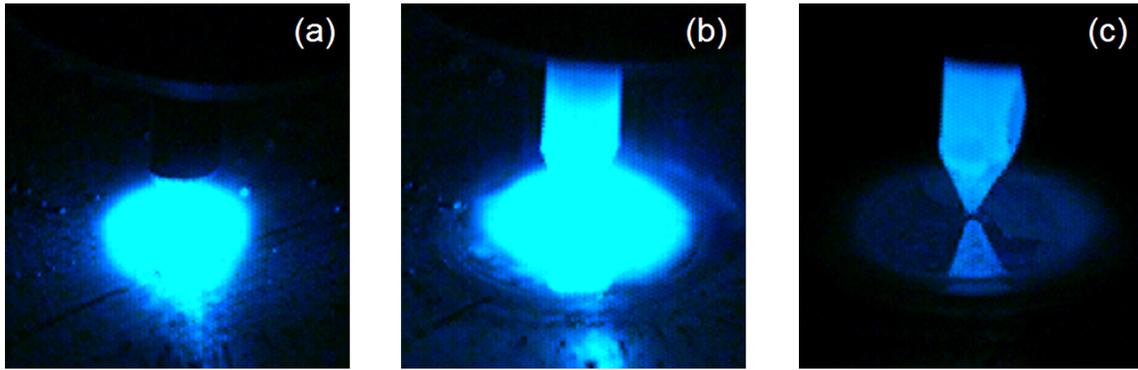


Figure 4.24 – Mesures sur vidéos : (a) allumage de l’arc, (b) expansion du bain, (c) extinction de l’arc.

près et l’incertitude sur le rayon est donc d’un ordre de grandeur plus satisfaisant ( $\pm 0,09 \text{ mm}$ ). Pendant la troisième phase (figure 4.24 (c)), l’arc est éteint et la limite du bain devient difficile à discerner à cause du manque de luminosité. Dans ce cas, l’incertitude sur le rayon reprend une valeur importante ( $\pm 0,2 \text{ mm}$ ). Malgré les fortes incertitudes, l’ensemble des mesures de largeur de bain sont représentées sur la figure 4.25.

La représentation des informations cumulées obtenues suite aux observations par caméra rapide (figure 4.25), permettent d’émettre certaines remarques. Sur la figure 4.25, il est possible de valider, à la surface du bain liquide, la répétabilité des essais de soudage. En effet, l’ensemble des évolutions se superposent, ce qui valide la notion de cumul d’information et donc l’intérêt des essais de durées intermédiaires (3 s, 6 s et 9 s). De plus, les évolutions observées pour les trois essais de 20 s sont cohérentes compte tenu des incertitudes. Sachant que l’un des essais était réalisé sans instrumentation, cela valide le fait d’avoir une instrumentation qui ne perturbe pas la forme de la zone fondue.

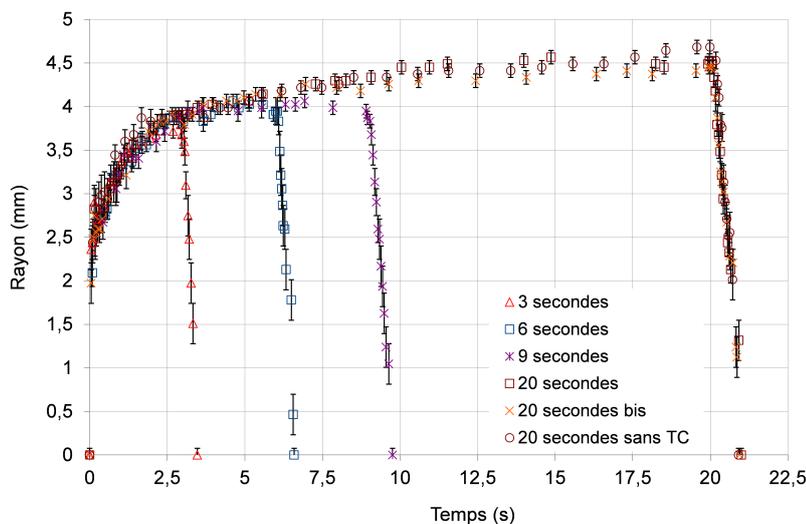


Figure 4.25 – Évolution des demi-largeurs de bain liquide mesurées par caméra rapide

#### 4.6.4 Résultats des mesures de formes de zones fondues - Macrographies

Les mesures sur les macrographies (figures 4.26, 4.27, 4.28 et 4.29) sont réalisées par l'intermédiaire du logiciel *MESURIM PRO* dont l'utilité est le traitement d'images numérisées. Ce logiciel ne fait que collecter une série de positions indiquées par l'utilisateur. La question qui se pose lors de cette exploitation est : que représente la démarcation observée sur les images ? L'intérêt de l'attaque chimique a été précédemment présenté. Néanmoins, la plage de température sur laquelle a lieu le changement de phase est de l'ordre de  $50^{\circ}\text{C}$  (soit environ  $0,2\text{ mm}$  sur les positions des lignes isothermes de liquidus et de solidus) et nous supposons que la "frontière" observée sur les macrographies est la limite pour laquelle la structure cristalline du matériau n'a pas du tout été modifiée, c'est-à-dire la ligne isotherme du solidus.

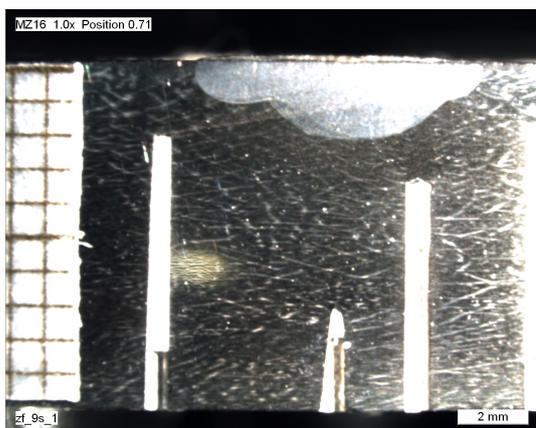


Figure 4.26 – Macrographie essai 6s

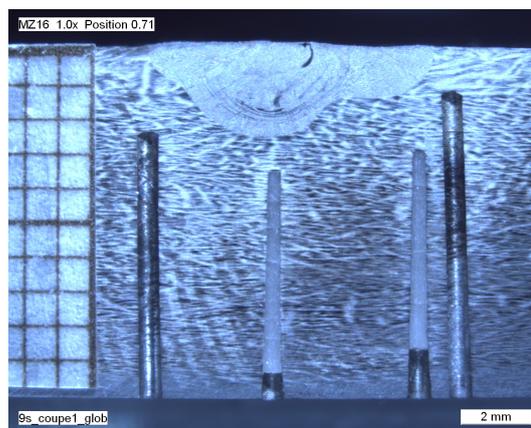


Figure 4.27 – Macrographie essai 9s

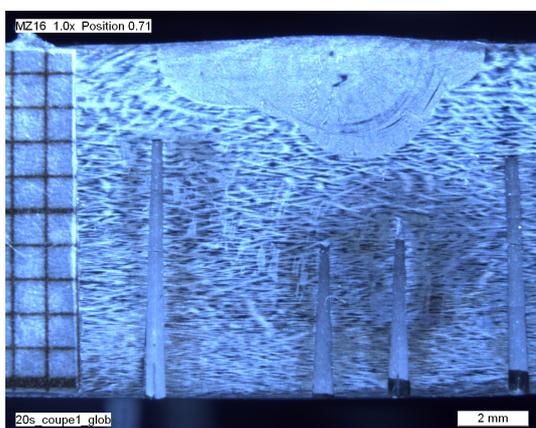


Figure 4.28 – Macrographie essai 20s

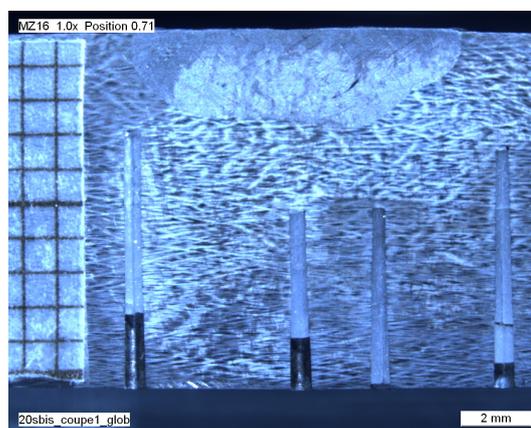


Figure 4.29 – Macrographie essai 20s bis

Au regard de ces illustrations (figures 4.26, 4.27, 4.28 et 4.29), l'essai de 3 s n'est pas présenté en raison d'un incident lors de la coupe transversale de l'échantillon (un problème de centrage de la scie a entraîné la destruction du plan diamétral rendant toute exploitation impossible). De plus, les macrographies restantes mettent en évidence un problème concernant l'hypothèse. Dans les analyses multiphysique (chapitre 2) et inverse (chapitre 3), cette hypothèse est fondamentale pour réduire la dimension du problème. Par conséquent, cette différence non négligeable ne permet pas de travailler avec les données précédemment acquises, ce qui nous a conduit à

envisager une deuxième série d'essais.

Les connaissances acquises, qu'elles soient positives ou négatives, lors de cette première phase restent précieuses ne serait-ce que pour préparer la seconde série d'essais. La source de ce problème étant liée à un écoulement du gaz de protection non-axisymétrique (concentration en éléments tensioactifs non-axisymétrique en surface de bain) et donc liée au procédé en lui-même, une phase de validation sera exécutée afin de confirmer l'hypothèse d'axisymétrie pour la seconde campagne expérimentale.

## 4.7 Deuxième série d'essais - Modifications par rapport à la première série

Les précédentes données expérimentales ne permettent pas une application du problème inverse. Cependant, cette première partie de l'étude fournit des informations utiles pour l'amélioration des trois types de mesures réalisées dans cette étude. Ces connaissances sont mises en œuvre dans une seconde étude.

### 4.7.1 La mesure de température

Malgré l'incertitude sur les raisons des ruptures de signaux délivrés par les thermocouples, le nombre de capteurs ayant présenté un problème peut être relié aux distances entre l'apport d'énergie (l'arc) et les points de mesure. Le bilan de cette analyse est présenté dans le tableau 4.3.

Distance d (cm)	d<3	3<d<3,5	3,5<d<4	4<d<4,5	4,5<d<5	5<d<5,5	5,5<d<6
Nb Total TC	2	7	8	5	10	10	2
Nb TC sans problème	0	3	4	4	9	9	2
Nb TC avec problème	2	4	4	1	1	1	0
% TC avec problème	100	57	50	20	10	10	0

Tableau 4.3 – Nombre de thermocouples à problème en fonction de l'éloignement de l'arc

Ce tableau permet de déterminer une limite de 4 cm à l'intérieur de laquelle les thermocouples ont tendance à présenter des problèmes. Il est à préciser que, pour les instrumentations précédentes, la majorité des mesures à l'intérieur de cette limite correspond aux essais de 3 s et 6 s. Pour ces deux cas, éloigner les thermocouples de l'apport d'énergie, revient à les positionner à des distances équivalentes à celles de l'essai de 9s. Il n'y a donc plus d'intérêt de réaliser des tirs de 3 s et 6 s. Seuls les cas de 9 s et 20 s sont effectués dans cette nouvelle série de mesures. La pièce peut, dans ce cas aussi, subir cinq essais instrumentés. Le cas 9 s est donc réalisé deux fois et le 20 s trois fois. Ainsi, la reproductibilité des essais pourra être vérifiée.

Afin de réduire les risques de problème, les thermocouples ayant présenté un défaut sont légèrement éloignés de l'apport d'énergie. Les figures 4.30 et 4.31 présentent le positionnement des capteurs. Dans ce cas, les profondeurs affichées sont les profondeurs de perçage donc le

## 4.7 Deuxième série d'essais - Modifications par rapport à la première série

référentiel de l'axe  $z$  est situé sur la face arrière de la pièce.

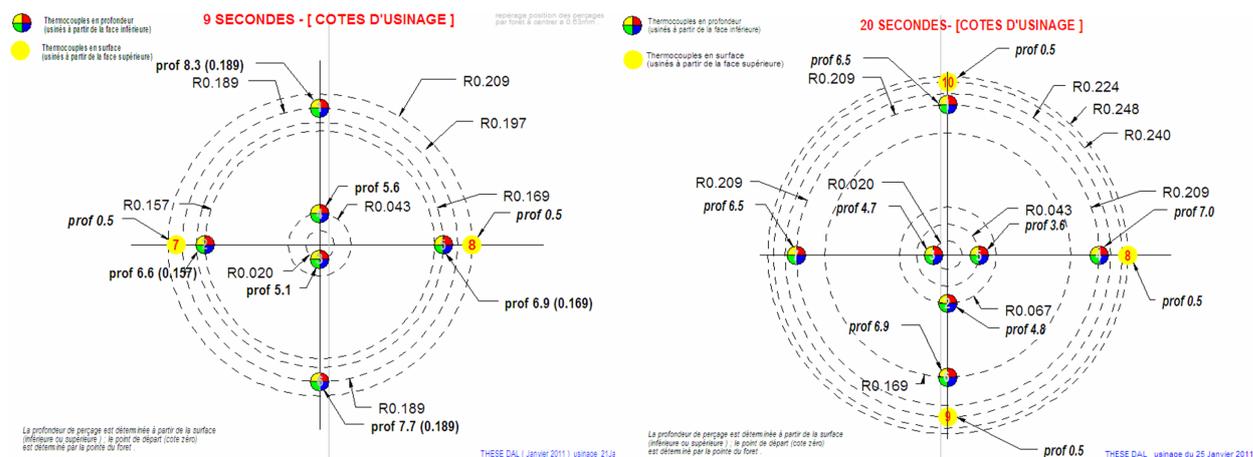


Figure 4.30 – Instrumentation - essais de 9s      Figure 4.31 – Instrumentation - essais de 20s

Les thermocouples, initialement positionnés sur trois plans, sont maintenant distribués dans quatre directions. La première raison à cela est d'éviter des "grappes" de thermocouples perturbant la diffusion de la chaleur (problème d'axisymétrie). La seconde concerne le fait de pouvoir positionner des mesures à des coordonnées très proches en évitant les "interférences" des perçages. Et enfin, une dernière raison qui est plus une précaution, est qu'ainsi, la répartition des instruments de mesure n'est plus déséquilibrée dans une direction particulière.

### 4.7.2 La mesure par caméra rapide

Il a été montré précédemment que les mesures des limites du bain liquide à partir de la caméra rapide, peuvent être fortement entachées d'incertitude liée à la saturation engendrée par la forte luminosité du plasma. Dans cette seconde étape de mesure, le filtrage ainsi que les paramètres d'acquisition sont établis lors d'essai sur une cible "martyr".

### 4.7.3 La préparation des échantillons et traitement des macrographies

La préparation des échantillons en vue de l'examen macrographique est la même que pour les précédents essais. Cependant, l'acide utilisé dans ce cas est l'eau régale. En effet, les données mesurées sur les précédentes macrographies ne sont pas totalement satisfaisantes en terme de netteté de séparation de la zone fondue et du métal de base. L'eau régale étant particulièrement corrosive, la durée de l'attaque chimique est réduite à 10 s.

#### 4.7.4 Validation de l'axisymétrie de la zone fondue

Le problème d'axisymétrie rencontré lors de la première série d'essais nous a conduit à l'impossibilité d'exploiter les données. Pour cette raison et afin de nous assurer de tous les paramètres opératoires, plusieurs essais préliminaires (non instrumentés) sont effectués.

L'objectif principal est la validation de l'axisymétrie, néanmoins nous profitons de ce point de test pour répondre à certains questionnements relatifs à la simulation multiphysique. L'interrogation en question concerne l'effet de la forme de la pointe de l'électrode sur la forme finale de la zone fondue. Rappelons que l'électrode étudiée possède un diamètre de  $2,4\text{ mm}$  et qu'elle est affûtée selon un angle total de  $45^\circ$ . Ces paramètres sont gardés constants. Cependant, la dimension du méplat est modifiée. Sur les figures 4.32, 4.33 et 4.34 sont présentés trois exemples d'électrodes. La première ne possède aucun méplat, la seconde et la troisième sont tronquées de manière à obtenir des méplats de respectivement,  $100\ \mu\text{m}$  et  $300\ \mu\text{m}$  de diamètres. La forme de la pointe de l'électrode a un effet sur la forme du plasma à proximité de la cathode, ce qui se traduit par un effet sur la forme de la distribution de l'énergie sur l'anode.

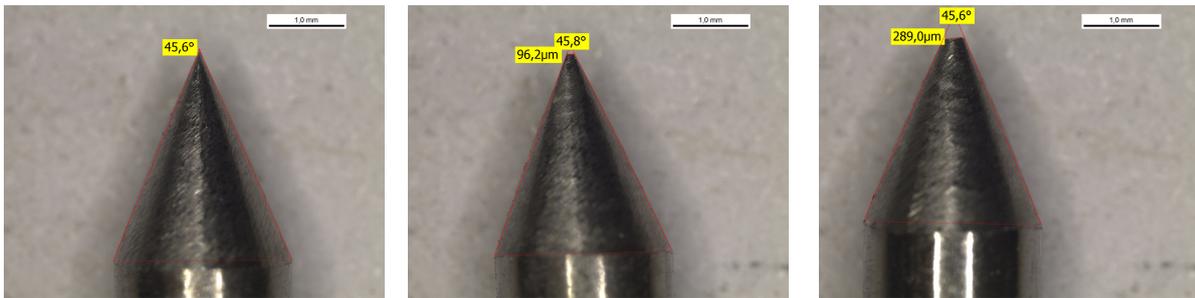


Figure 4.32 – Sans méplat    Figure 4.33 – Méplat de  $100\ \mu\text{m}$     Figure 4.34 – Méplat de  $300\ \mu\text{m}$

Les résultats de cette analyse sont présentés en annexe D. Précisons tout de même quelques observations. Premièrement, plus le diamètre du méplat augmente, plus la profondeur de pénétration du bain augmente et plus le rayon en surface diminue. Deuxièmement, lorsque le diamètre du méplat est supérieur à  $100\ \mu\text{m}$ , son influence sur la forme de la zone fondue devient très faible. En revanche, la différence observée avec et sans méplat est non négligeable. Lors de la seconde série d'essais instrumentés, les électrodes présentent une pointe tronquée de  $200\ \mu\text{m}$  de diamètre.

## 4.8 Résultats et analyse

Les résultats sont du même type que lors de la première série d'essais, c'est-à-dire, des évolutions de température, des mesures du rayon du bain en surface et des visualisations de la dimension maximale de la zone fondue (macrographies).

### 4.8.1 Résultats des mesures de température

De la même manière que pour la série d'essais précédente, les figures 4.35, 4.36, 4.37, 4.38 et 4.39, sont des illustrations des températures mesurées.

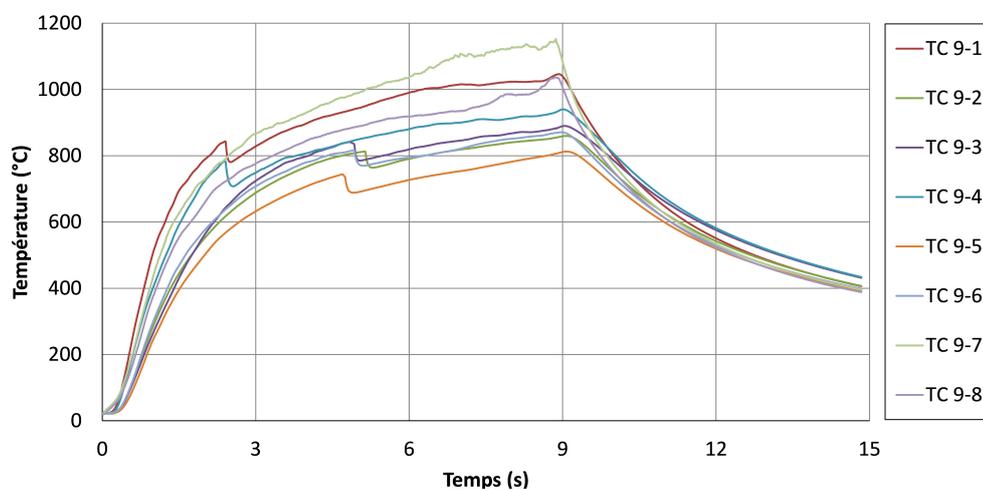


Figure 4.35 – Évolution des températures mesurées par thermocouples - essai 9s1 - série 2

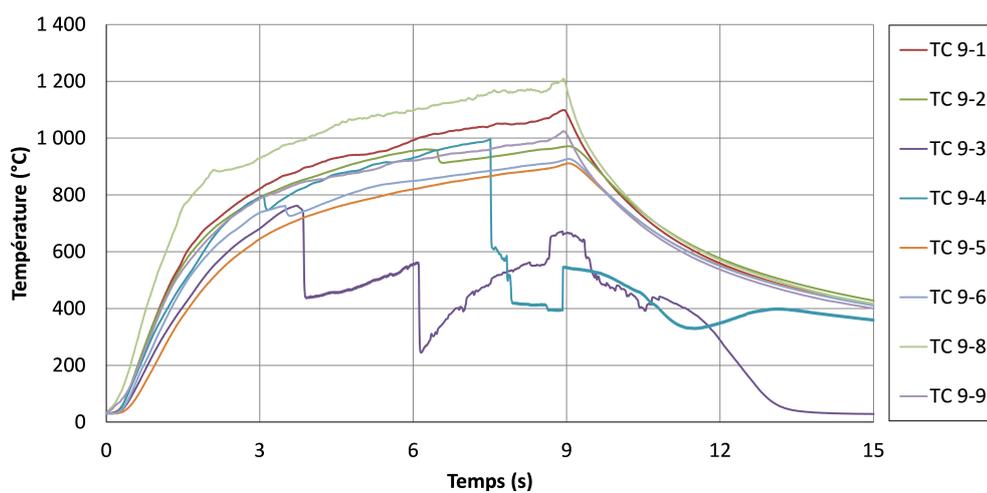


Figure 4.36 – Évolution des températures mesurées par thermocouples - essai 9s2 - série 2

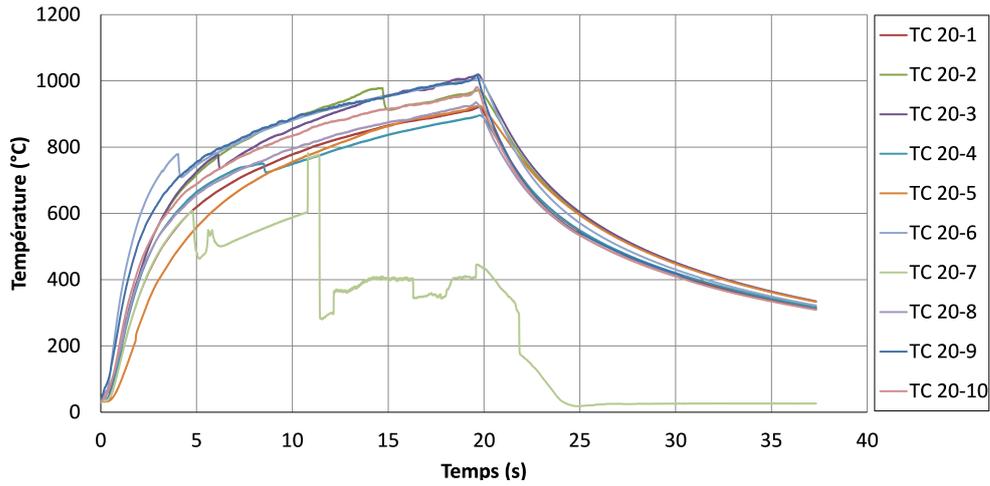


Figure 4.37 – Évolution des températures mesurées par thermocouples - essai 20s1 - série 2

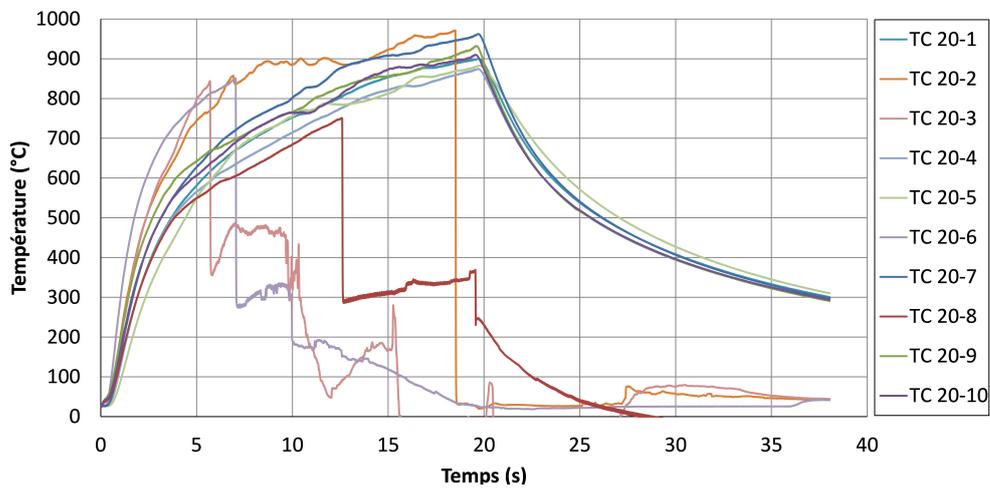


Figure 4.38 – Évolution des températures mesurées par thermocouples - essai 20s2 - série 2

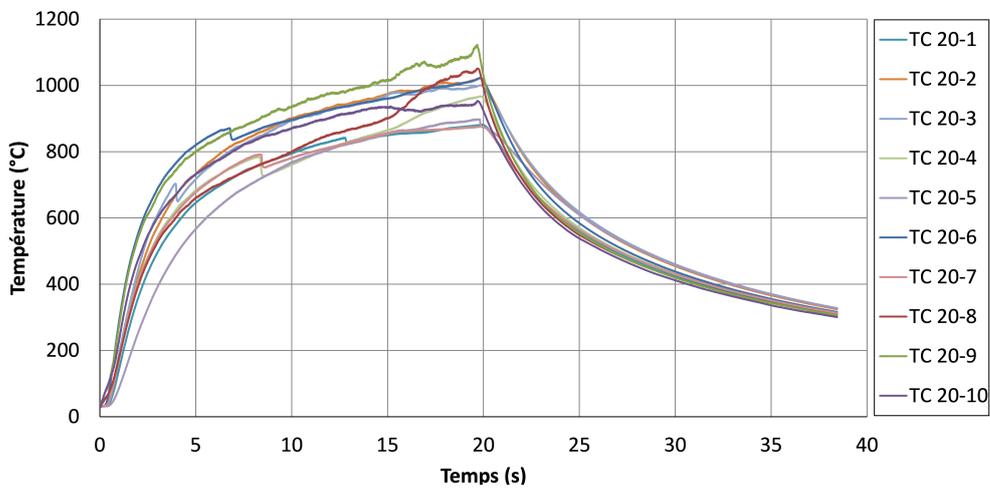


Figure 4.39 – Évolution des températures mesurées par thermocouples - essai 20s3 - série 2

De manière générale, sur ces précédentes illustrations, le problème de rupture du signal transmis par certains thermocouples reste présent (par exemple les TC 9-3 et 9-4 sur la figure 4.36). Par contre, leurs occurrences sont bien plus faibles. Seuls sept capteurs présentent cette singularité (soit moins de 15%). Les modifications apportées à la première configuration expérimentale ont donc permis de réduire ce phénomène.

Un autre problème, assez peu présent lors de la première série de mesures, est ici courant (environ 30% des TC). Il s'agit de la chute rapide et sans raison apparente des températures mesurées (d'environ 20 °C à 40 °C sur les TC 20-2, TC 20-3, TC 20-4 et TC 20-9 de la figure 4.37). Ce type d'anomalie peut faire penser à un défaut de contact entre le thermocouple et l'échantillon. Cependant, ce n'est pas le cas ici, car un contact imparfait entraînerait un retard lors du refroidissement, or sur les courbes précédentes, les refroidissements avec et sans ce défaut sont similaires.

De plus, compte tenu des effets de la modification (éloignement des TC de l'apport) sur les mesures de température, il est possible de conclure que les chutes de température et les ruptures de signaux sont des manifestations de degrés différents du même phénomène électromagnétique.

### 4.8.2 Résultats des mesures de rayon de zones fondues en surface

La figure 4.40 montre des images de caméra rapide à différents instants obtenues pour l'essai 20s1. Ces images présentent une nette amélioration en terme de visualisation du front. En effet, le bain liquide est visible dès les premiers instants ( $t = 0,01 s$ ,  $t = 0,1 s$  et  $t = 1 s$  de la figure 4.40).

Rappelons que l'amorçage de l'arc se fait par contact ( $t = 0 s$ ) puis remontée de l'électrode en  $0,3 s$ .

Les images relatives aux instants  $t = 0,01 s$ ,  $t = 0,1 s$  et  $t = 1 s$  présentent un contour de zone liquide accidenté. En revanche, pour des temps plus importants ( $t = 10 s$ ,  $t = 19,58 s$ ,  $t = 19,59 s$  et à la fin de l'acquisition), les formes sont bien plus régulières. La mesure du rayon  $y$  est donc plus précise.

L'image présentant la forme du bain à la fin de l'acquisition est une illustration de la conséquence de la faible hauteur d'arc de ces essais de soudage. Lors de l'extinction de l'arc, l'annulation de la pression d'arc et la dilatation du bain, font que l'électrode entre en contact avec le bain toujours liquide. Les forces de tension superficielle maintiennent un "pont" liquide sur la cathode et lors de la solidification du bain, l'électrode reste figée dans l'échantillon.

L'extinction de l'arc est visualisée pour un temps  $t = 19,59 s$  au lieu des  $20 s$  programmées. Le principe de l'allumage de l'arc est d'imposer un courant négatif ( $-20 A$ ) durant une courte période avant d'imposer le courant de soudage ( $150 A$ ). En réalité, la somme des deux périodes correspond au total des  $20 s$ .

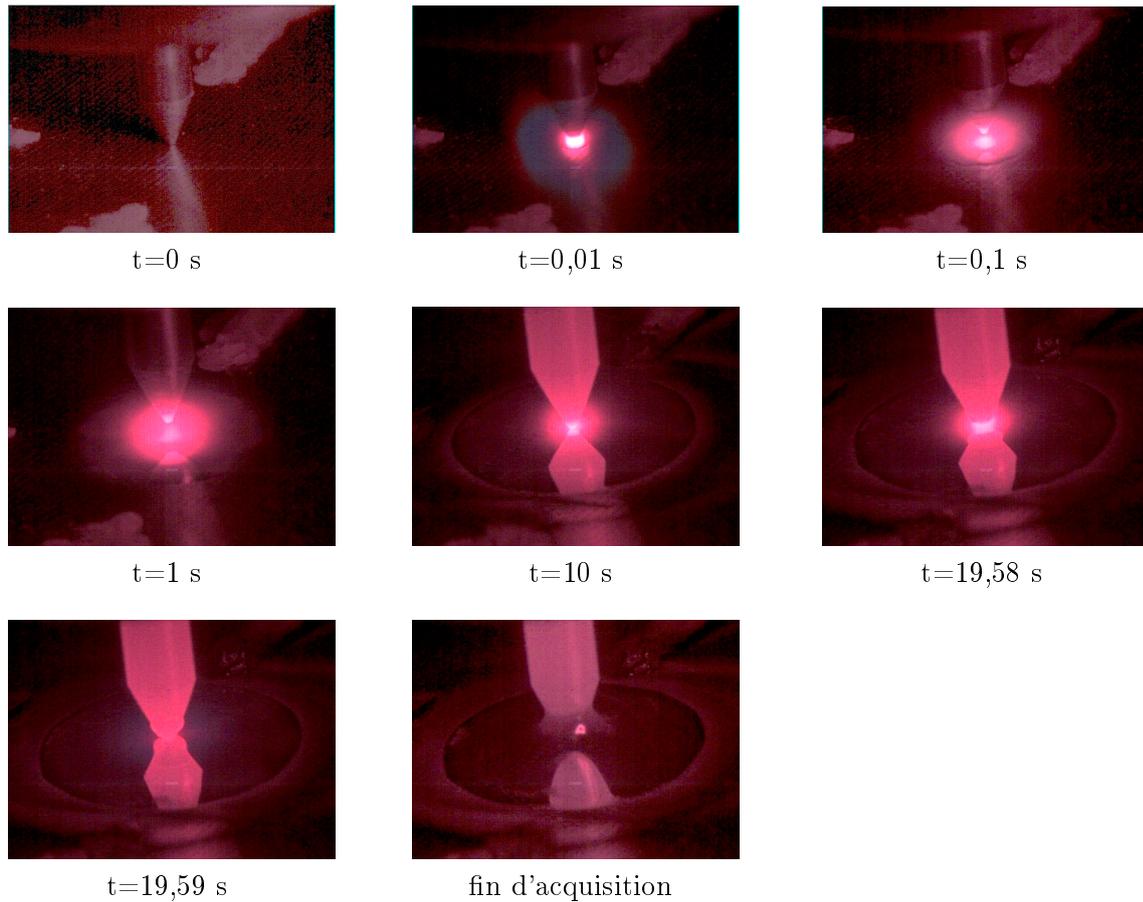


Figure 4.40 – Captures d’images de la vidéo relative à l’essai 20s1

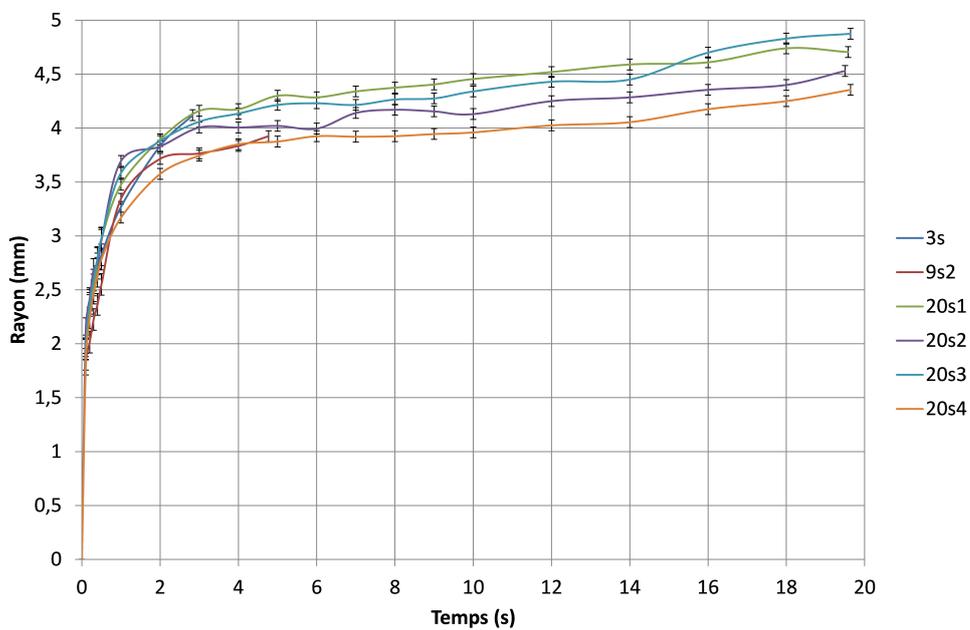


Figure 4.41 – Évolutions des rayons de zones fondues en surface

La figure 4.41 montre les évolutions des demi-largeurs de bain liquide pour les différents essais. Les résultats de l’essai 9s1 n’est pas représenté, car il s’agit du premier essai effectué durant cette

## 4.8 Résultats et analyse

campagne, et les paramètres d'acquisition ne sont pas encore optimaux. Pour la même raison, seuls les premiers instants ( $< 5s$ ) de l'essai 9s2 sont conservés en mémoire.

Cette figure illustre l'intérêt du filtrage optique. En effet, les incertitudes de mesure sur les vidéos sont bien plus faibles que dans le cas précédent (figure 4.25). Néanmoins, les résultats des quatre essais de 20s ne présentent pas la même répétabilité pour des temps importants, la dispersion des valeurs est de l'ordre de  $0,25\text{ mm}$ .

### 4.8.3 Résultats des mesures de formes de zones fondues - Macrographies

De la même manière que pour la première série d'essais, les images présentées sur les figures 4.42, 4.43, 4.44, 4.45 et 4.46 sont les clichés réalisés après attaque chimique. Deux observations principales sont effectuées. S'agissant de la méthode de préparation des échantillons, il est à remarquer que les séparations entre les zones ayant fondu et le métal de base sont clairement identifiables. De plus, en ce qui concerne le soudage en lui-même, les zones fondues observées respectent l'hypothèse d'axysimétrie.

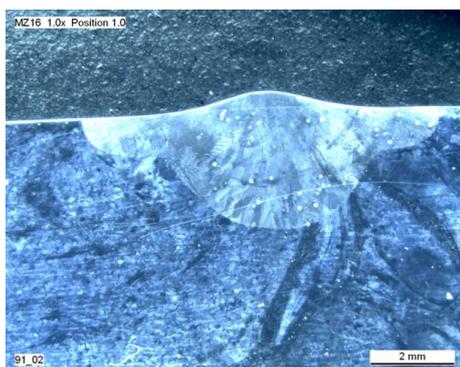


Figure 4.42 – Macrographie essai 9s1



Figure 4.43 – Macrographie essai 9s2



Figure 4.44 – Macrographie essai 20s1

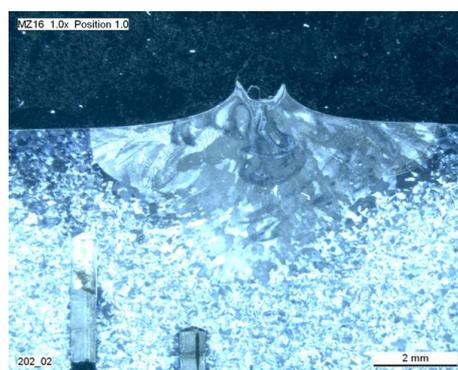


Figure 4.45 – Macrographie essai 20s2

La remarque du paragraphe précédent sur "l'accrochage" de l'électrode lors de la solidification est illustrée sur ces images (9s2, 20s1, 20s2 et 20s3) par l'empreinte de la cathode sur la partie supérieure de la partie solidifiée. La cathode en tungstène n'a pas fondu, cependant un élément semble avoir diffusé dans le métal liquide. Cette perturbation n'intervenant qu'après ex-



Figure 4.46 – Macrographie essai 20s3

tion de l'arc, et n'ayant donc pas d'influence sur les écoulements lors de la fusion, ne pouvant pas les quantifier nous n'insisterons pas sur ses effets potentiels.

Les positions des limites de zones fondues sont relevées sur les précédentes macrographies et regroupées sur la figure 4.47.

De la figure 4.47, il ressort que quatre des cinq essais valident l'hypothèse d'axisymétrie. Cepen-

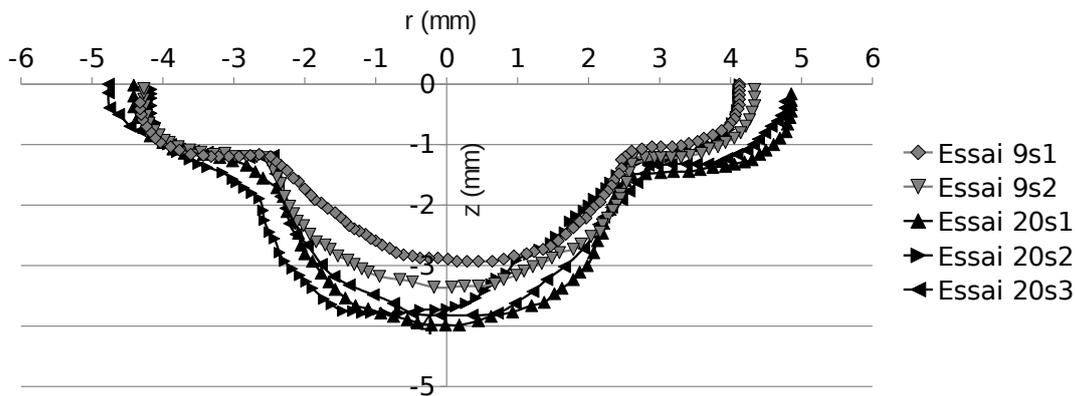


Figure 4.47 – Relevés de positions d'interface au temps final pour l'ensemble des essais

dant, une certaine disparité est observée entre les formes des essais de même durée. Un écart maximal sur les profondeurs de pénétration de  $0,2 \text{ mm}$  pour les essais de  $20 \text{ s}$  et de  $0,4 \text{ mm}$  pour les essais de  $9 \text{ s}$ , ce qui implique que l'aspect cumulatif de la première série de mesures n'est pas obtenue ici. Ce problème était déjà observable sur les mesures de largeur de bain en surface. Cependant, ces résultats restent parfaitement exploitables indépendamment les uns des autres, notamment pour la résolution du problème inverse.

## 4.9 Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre et dans le cadre de l'expérience optimale définie au chapitre 3, ont été mises en place des instrumentations relatives à la mesure de température, à l'observation de la position

du front en surface de zone fondue et l'extraction de la forme finale de la zone fondue.

Une description de l'échantillon retenu, un disque en acier 316L de 160 *mm* de diamètre et de 13,7 *mm* d'épaisseur, et du support est réalisée. La taille de cet échantillon comparée à la taille des zones fondues a conduit à positionner plusieurs tirs sur chaque échantillon. (De plus, chacun de ces tirs a été instrumenté sauf un afin de vérifier l'influence de l'instrumentation sur la forme de la zone fondue finale).

Pour chacune de ces instrumentations, des précautions particulières ont dû être prises afin de minimiser les incertitudes de mesure.

Ainsi, les températures sont obtenues à l'aide de thermocouples de très faibles diamètres, de type K, instrumentés au sein de la phase solide autour de la zone fondue. Le positionnement de ces capteurs est établi dans le but d'avoir le maximum d'information tout en restant dans leur gamme de mesure. Les observations de l'évolution du front sont effectuées par caméra rapide. Les formes maximales des zones fondues sont relevées sur des macrographies réalisées après les essais.

La complexité de cette étude nous a mené à réaliser deux campagnes expérimentales. Dans chacune d'elles, le disque subit cinq tirs, de durées différentes. Les études théoriques préliminaires ont permis grâce à la comparaison classique avec les macrographies des formes finales des zones fondues de définir une instrumentation préalable en thermocouples de manière à positionner, en moyenne, neuf capteurs dans une zone de température allant de 1000 °C à 1200 °C.

Concernant la première série de mesures, cinq essais de 3 s, 6 s, 9 s et deux de 20 s ont été réalisés. A l'analyse des résultats, des difficultés ont été rencontrées pour chaque type de mesure. S'agissant des températures, les capteurs positionnés trop près de l'arc électrique ont fourni un signal perturbé. L'unique solution, dans ce cas, semble être un éloignement des thermocouples et donc l'annulation des essais de durée inférieure à 9 s. Les observations par caméra rapide sont perturbées par le fort niveau de rayonnement du plasma. Cependant, l'utilisation d'une lampe halogène et d'un filtrage approprié permet l'acquisition d'images exploitables. Pour les dimensions maximales du bain et donc l'examen macrographique, le choix de l'acide pour la réalisation de l'attaque chimique de l'acier est un paramètre clef dans la réalisation des macrographies. De plus, dans l'interprétation, une incertitude pèse sur la valeur de l'isotherme que représente la limite révélée par l'attaque.

Malgré des résultats satisfaisants en terme de mesure pour la première série d'essais, un problème d'axysymétrie des zones fondues est apparu en raison d'un écoulement du gaz de protection lui-même non-axysymétrique. Après identification de la source de ce problème, la seconde série a été effectuée, et compte tenu des connaissances acquises lors de la première campagne expérimentale, des améliorations ont été apportées aux différentes instrumentations. Pour cette seconde série, cinq essais instrumentés, deux de 9 s et trois de 20 s ont été réalisés. Ici encore, des incertitudes persistent sur les mesures. Une analyse des mesures issues des films, concernant

la limite des zones fondues en surface, conduit à définir une incertitude maximale de  $\pm 0,25 \text{ mm}$ . Pour les macrographies, nous avons obtenu des formes axisymétriques. Une comparaison de ces formes obtenues pour les cinq essais montre cependant une certaine disparité. Enfin, les mesures de température ont enregistré des perturbations qu'il va être possible de corriger afin de les introduire dans la procédure d'estimation de l'évolution temporelle de l'interface liquide - solide.

# Chapitre 5

## VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>156</b>
<b>5.2</b>	<b>Inversion des données expérimentales</b>	<b>156</b>
5.2.1	Préparation et mise en forme des données	158
5.2.2	Initialisation de l'estimation	160
5.2.3	Difficultés	161
5.2.4	Formes de fronts estimées et températures calculées	162
5.2.5	Prise en compte des thermocouples - Modèle d'erreur	167
5.2.6	Perturbation à l'instant final	174
5.2.7	Conclusion	176
<b>5.3</b>	<b>Comparaison : Expérimental - Multiphysique</b>	<b>177</b>
5.3.1	Introduction	177
5.3.2	Présentation de la simulation retenue	177
5.3.3	Comparaison entre températures calculées et températures mesurées	180
5.3.4	Comparaison des largeurs de bain en surface	182
5.3.5	Comparaison des formes finales de zones fondues	183
5.3.6	Conclusion	184
<b>5.4</b>	<b>Bilan sur les deux méthodes</b>	<b>184</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusion du chapitre 5</b>	<b>187</b>

---

## 5.1 Introduction

Ce chapitre a pour vocation de valider expérimentalement les précédentes études théoriques. En d'autres termes, le problème inverse étant validé théoriquement, il est maintenant résolu à partir de données issues des cas expérimentaux. Pour confirmer la simulation multiphysique de l'anode, les résultats numériques sont comparés à ceux obtenus expérimentalement. Finalement, les résultats des deux méthodes sont mis en parallèle pour analyser les points forts de chacune d'elles.

Premièrement, la dernière étape d'un problème inverse est son application à un cas expérimental. Dans le chapitre 4, plusieurs campagnes d'essais ont été présentées, elles-mêmes constituées de plusieurs cas de soudage. Il faut cependant faire un choix sur les données à conserver et les mettre en forme de manière à les introduire dans la précédente étude inverse théorique (chapitre 3). La résolution du problème étant soumise à cinq types d'erreur, nous verrons quelles sont leurs influences respectives sur les résultats de l'estimation.

Deuxièmement, en ce qui concerne la simulation multiphysique de l'échantillon durant la phase de fusion, les comparaisons des températures, de l'évolution du front en surface et de la forme finale de la zone fondue, permettent de conclure quant à la qualité de ce type d'analyse. Les hypothèses adoptées pour ce modèle multiphysique peuvent alors être discutées.

Enfin, chaque méthode n'ayant pas tout à fait la même finalité, une comparaison directe n'est pas possible. Cependant, nous présentons quels sont les atouts et les limites de chacune d'elles à travers la comparaison de quelques résultats.

## 5.2 Inversion des données expérimentales

Dans cette partie, il s'agit d'estimer la position d'un front de fusion obtenu lors d'une opération de soudage simplifiée mais réelle. Les résultats des différents essais expérimentaux présentant quelques écarts, nous avons retenu le cas **20s1** de la seconde série d'essais présentée dans le chapitre 4. Cet essai est conservé compte tenu des résultats observés lors de l'analyse expérimentale. En effet, la forme de zone fondue sur la macrographie correspondante est celle convenant le mieux à l'hypothèse d'axisymétrie. L'évolution de la frontière liquide - solide observée en surface est faiblement entachée d'incertitude car visible sur la majorité des temps sélectionnés (ce qui est le cas pour tous les essais de 20s). Le cas 20s1 n'est pas le plus réussi en terme de mesure de température. En effet, le 20s3 est meilleur car il ne présente aucune perte matérielle. Cependant, l'importance de l'hypothèse d'axisymétrie réalisée dans les simulations, nous oriente fortement vers cet essai 20s1 pour lequel nous disposons de 9 capteurs opérationnels sur les 10 prévus.

L'organigramme présenté sur la figure 5.1 rappelle l'organisation de la mise en œuvre du problème inverse.

Suite à l'acquisition des données expérimentales (la macrographie, le film de la surface de la zone fondue et les mesures de température), la première étape consiste à extraire les informations

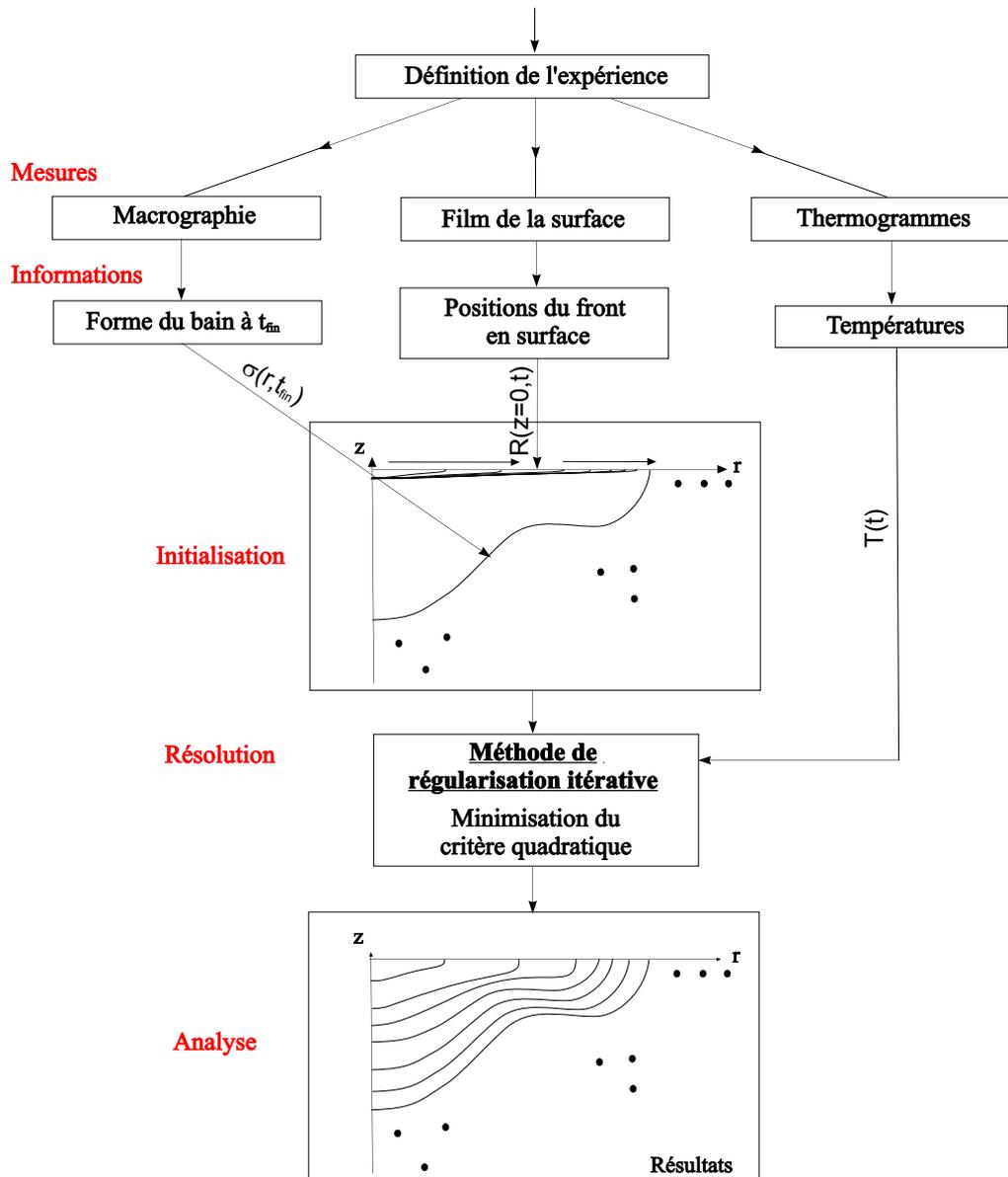


Figure 5.1 – Organigramme de la conception du problème inverse

importantes :

- la forme finale de la zone fondue afin de l'imposer en tant que condition initiale ( $t = t_f$ ) dans le problème adjoint (résolu à rebours),
- l'évolution du front en surface de zone fondue pour construire l'initialisation des formes de fronts,
- les évolutions de température aux points de mesure en vue de calculer le critère quadratique à minimiser.

Ensuite, le problème est résolu, amenant à une évolution temporelle du front de fusion. Ces

formes estimées sont ensuite analysées compte tenu des erreurs et ainsi, certaines améliorations sont apportées.

### 5.2.1 Préparation et mise en forme des données

Pour la résolution de ce problème inverse, les données issues de l'expérience doivent être redéfinies. Par exemple, nous devons fixer les discrétisations temporelles et spatiales de la représentation du front ou encore, corriger les températures mesurées.

#### 5.2.1.1 Température du "front"

Avant de présenter les discrétisations de l'évolution de la frontière, commençons par présenter la température à laquelle nous supposons qu'elle se trouve. Rappelons que la fusion d'un acier ne se produit pas à température constante mais sur une zone dite "pâteuse" ( $T_S = 1385\text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_L = 1450\text{ }^\circ\text{C}$ ). Nous faisons l'hypothèse que le front observé sur les macrographies correspond à l'isotherme du solidus. Ce choix est fait en considérant qu'après cette limite, la microstructure n'est pas modifiée, ce qui correspond à la démarcation révélée par l'attaque chimique.

Aussi, nous supposons que l'aspect dynamique du changement de phase n'a pas d'influence sur les températures auxquelles a lieu la transformation (phénomènes du type surfusion).

#### 5.2.1.2 Position finale du front

La discrétisation spatiale de la frontière est conditionnée par les dimensions du maillage imposé sur cette frontière. En l'occurrence, des éléments quadratiques de  $10^{-4}m$ , suffisent à représenter le gradient thermique à proximité de la frontière.

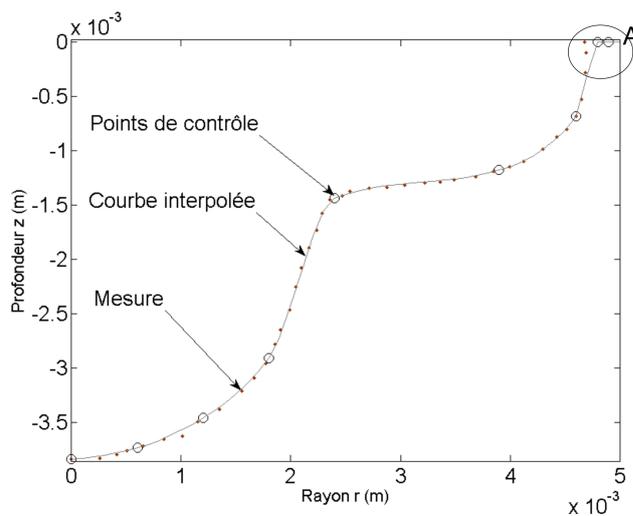


Figure 5.2 – Paramétrisation de la forme du front à l'instant final - comparaison avec la macrographie

Sur la figure 5.2, est présentée la position du front mesurée sur la macrographie (les points)

ainsi que le résultat de la paramétrisation (la ligne continue). La ligne continue est le résultat de l'interpolation par rapport aux neuf points de contrôle. De façon générale, il est possible de conclure que le front imposé numériquement (à l'instant final) est très proche de celui mesuré sur la macrographie. Seule la forme à proximité de la face supérieure (zone A) est légèrement différente de la mesure. De plus, cet écart permet d'éviter d'avoir à imposer un déplacement purement vertical, facilitant la résolution des problèmes numériques.

### 5.2.1.3 Évolution temporelle du front en surface

Il a été montré, lors de la validation de la simulation simplifiée, que la discrétisation temporelle du déplacement du front de fusion est un paramètre particulièrement sensible. Contrairement au cas numérique, seule l'évolution en surface est disponible. Néanmoins, un pas de temps faible mais croissant avec le temps (figure 5.3) permet de représenter correctement l'évolution du front afin de créer une représentation satisfaisante du champ thermique.

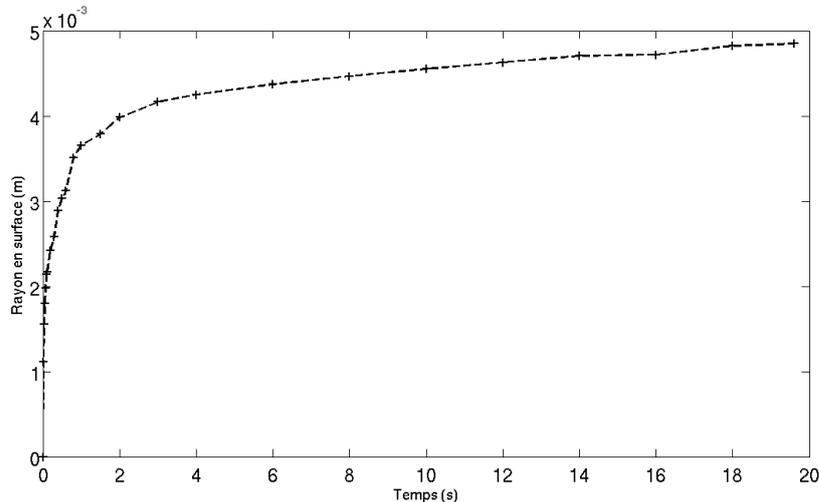


Figure 5.3 – Définition de la discrétisation temporelle de l'évolution du rayon du bain liquide en surface

Précisons que les valeurs utilisées pour créer la figure 5.3 proviennent de la mesure par caméra rapide. Une fréquence d'acquisition de 100  $Hz$  est largement suffisante pour définir, dans la résolution du problème inverse, l'évolution du front en surface.

### 5.2.1.4 Correction des températures mesurées

La présentation des résultats des mesures de température a été faite au chapitre 4. Cependant, pour les intégrer au problème inverse, quelques modifications et corrections sont à faire. La figure 4.37, présentée dans le chapitre précédent, illustre les données mesurées. Sur les dix mesures prévues, un unique capteur a présenté une rupture de signal (TC 20-7). Mais rappelons que pour ces coordonnées ( $r = 5,31 \text{ mm}$  et  $z = -2,95 \text{ mm}$ ), la mesure a été doublée et donc l'information reste disponible par le TC 20-1. De plus, quatre courbes présentent une chute de température. Après analyse, la cause la plus probable est une perturbation électrique. De ce fait, les erreurs

peuvent être compensées, ce qui amène aux courbes présentées sur la figure 5.4.

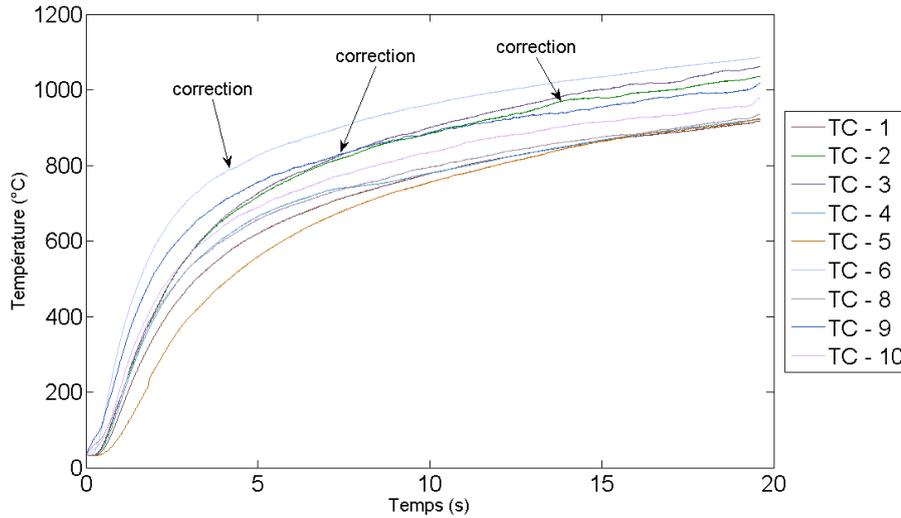


Figure 5.4 – Températures expérimentales corrigées de l'essai 20s1

Notons que sur ces évolutions de température, une fois les modifications apportées ("correction" sur la figure 5.4), les courbes présentant une correction sont difficiles à discerner des courbes sans défaut. Il s'agit donc de retrouver, par méthode inverse, ces évolutions de température.

## 5.2.2 Initialisation de l'estimation

La résolution du problème inverse théorique (chapitre 3) nous a permis de vérifier que l'initialisation n'a d'influence que sur le nombre total d'itérations et non sur les formes estimées. De ce fait, l'unique précaution concerne la capacité des différents problèmes à traiter cette évolution initiale ( $k = 0$ ). De plus, rappelons que la température de fusion n'est imposée sur la frontière mobile que lorsque celle-ci s'est déplacée d'au moins  $\delta z = 1.10^{-5} m$ . Donc, pour cette initialisation, un déplacement faible est imposé sur toute la longueur de la frontière et pour tous les pas de temps. Les figures 5.5 et 5.6 illustrent de deux façons cette évolution.

Au cours de la procédure inverse, cette évolution initiale est la plus éloignée de la réalité. Il s'agit donc du cas le plus "difficile" à résoudre d'un point de vue numérique. En effet, avoir un estimé directement lié à la "déformation" peut avoir des conséquences sur les convergences des différents problèmes. Par exemple, la forme de la zone fondue est connue à l'instant final (pour l'initialisation du problème adjoint) et elle est imposée à des positions proches de zéro pour tous les pas de temps précédents. Cela signifie que l'évolution est circonscrite sur le dernier intervalle de temps ( $\Delta t \approx 2s$ ). Si cet intervalle est trop court, la déformation est trop rapide, et, en fonction du pas de temps utilisé pour la résolution numérique, cette dernière peut ne pas converger.

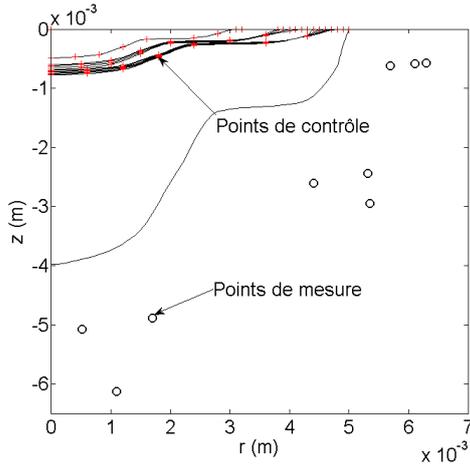


Figure 5.5 – Hypothèse d’initialisation de l’évolution du front - représentation 2D

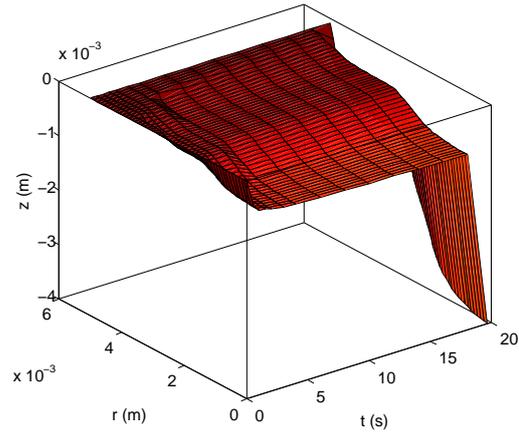


Figure 5.6 – Hypothèse d’initialisation de l’évolution du front - représentation 3D

### 5.2.3 Difficultés

La démarche inverse appliquée à un cas expérimental est soumise à des difficultés liées à cinq types d’erreur :

- Le modèle est une représentation mathématique du phénomène à représenter. Dans le cas présent, la complexité du problème physique à traiter nous a conduit à définir une modélisation simplifiée. Cette dernière n’est évidemment pas parfaite et entraîne donc des erreurs sur les fronts estimés. Les points critiques de la modélisation peuvent être ; les propriétés thermophysiques qui, à hautes températures sont assez peu présentes dans la littérature, ou la température à laquelle nous supposons être le front (solidus).
- La paramétrisation de la forme du front à un instant donné est supposée suffisante avec 9 points de contrôle. Cette hypothèse est établie dans le chapitre 3. Cependant, dans la présente étude expérimentale, nous n’avons aucun moyen de vérifier ce point et il se peut donc que ce soit une source d’erreur sur les résultats de l’inversion.
- Le bruit de mesure est une source d’erreur dont l’influence a été quantifiée dans la précédente étude théorique. En effet, s’il est distribué selon une loi normale, il a tendance à limiter la réduction du critère quadratique mais les résultats de l’estimation restent tout à fait cohérents.
- Une erreur systématique peut être plus gênante pour l’estimation. En effet, elle génère un biais qui rend les résultats de la mesure différents des résultats de la simulation, et donc pour compenser cet écart la fonction à estimer prend une valeur erronée. Dans le cas présent, la plus grande source d’erreur provient du caractère intrusif de la mesure par thermocouples. Dans notre cas, une résolution en deux étapes est donc effectuée. La première résolution est effectuée sans tenir compte de cette perturbation. Ensuite, nous corrigeons les températures mesurées à partir d’un modèle d’erreur.

- L'algorithme peut aussi être une source d'erreur. En l'occurrence, la détermination du gradient de la fonctionnelle résiduelle est réalisée par la résolution d'un problème adjoint. Ce dernier a la particularité d'être résolu à rebours (de  $t = 20\text{ s}$  à  $t = 0\text{ s}$ ) et d'avoir pour solution initiale une valeur de  $p(t = 20\text{ s}) = 0$  (avec  $p$  la variable adjointe). La variable  $p$  est continue en temps et en espace. La direction de descente, qu'elle permet de calculer, peut donc être perturbée pour les temps proches de  $20\text{ s}$ . Nous verrons par la suite quel est l'effet de cette erreur sur l'identification. Une autre source d'erreur liée à l'algorithme apparaît lors de l'écriture du problème en variation. Rappelons qu'une hypothèse a été émise pour la condition sur la frontière représentant le front. Il avait été considéré qu'une variation de la position du front ( $\delta\sigma$ ) peut être représentée par une variation de température ( $\delta\theta$ ). Le lien entre ces deux variations étant obtenu par un développement limité de Taylor (chapitre 3). L'erreur que cette hypothèse implique, est difficilement quantifiable, néanmoins nous pouvons supposer qu'elle est faible devant celle due au caractère intrusif des thermocouples.

Lors de la présentation et de l'analyse des résultats, le parallèle est fait entre ces difficultés et la représentativité des résultats.

#### 5.2.4 Formes de fronts estimées et températures calculées

Les résultats que nous présentons sont de deux types, les formes des fronts estimés et les températures simulées aux points de mesure. Ces résultats dépendent de la valeur du critère quadratique minimal obtenu. Ces premiers résultats sont obtenus pour un critère représentatif d'un écart de température moyen, sur chaque point de mesure, de  $35,5\text{ }^\circ\text{C}$ . Cette erreur est bien supérieure à celle générée par le bruit de mesure (principe de l'écart) mais est satisfaisante au regard des erreurs associées à la résolution du problème inverse.

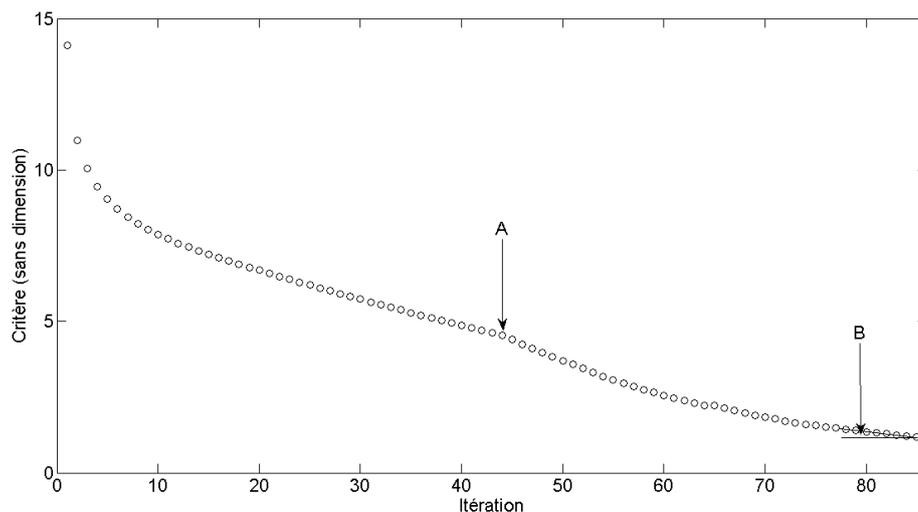


Figure 5.7 – Évolution du critère quadratique

La figure 5.7 présente la décroissance du critère quadratique. Le changement brusque de la pente (point A) est la conséquence de la modification du pas de descente ( $\gamma$ ). Ce dernier est

calculé de manière à être optimal pour la descente mais aux premières itérations, il amène à des évolutions de front trop rapides aux premiers instants de résolution et donc à la divergence des résolutions numériques. Nous faisons donc le choix de pondérer ce paramètre de 0,01. À l'itération 45, nous reprenons une valeur optimale du pas de descente, ce qui explique l'augmentation de la vitesse de décroissance. Cette modification ne perturbe en rien les formes finales estimées.

Sur cette figure, la valeur finale du critère tend à diminuer encore (point B). Néanmoins, la décroissance devient très lente et les formes de fronts estimés varient très peu. Nous conservons donc ces résultats pour l'analyse à suivre qui va intégrer les erreurs dues aux mesures (paragraphe 5.2.5).

#### 5.2.4.1 Les formes de fronts estimés

Afin de visualiser la progression de l'estimation, la figure 5.8 rappelle le "point de départ" de l'estimation et la figure 5.9, les positions des fronts estimés.

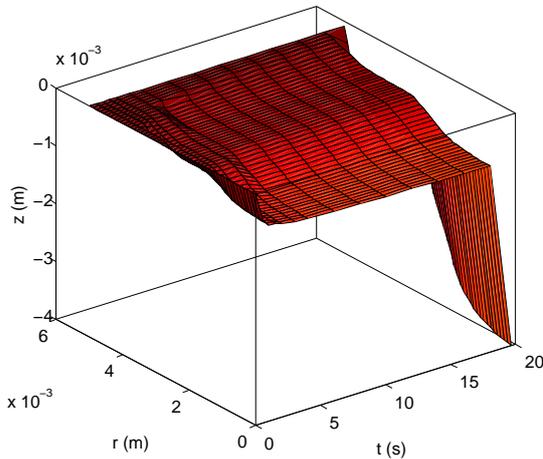


Figure 5.8 – Hypothèse d'initialisation de l'évolution du front

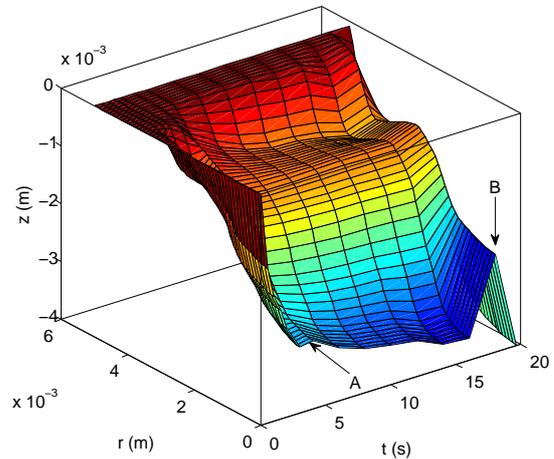


Figure 5.9 – Évolution du front estimée

Sur la figure 5.9, les formes de fronts semblent, a priori, cohérentes au regard des connaissances acquises par la simulation multiphysique et grâce aux résultats expérimentaux. Par exemple, en périphérie ( $r > 3 \text{ mm}$ ), les formes du front illustrent bien la présence de l'écoulement dû à l'effet Marangoni (formation du rouleau de convection). En revanche, deux points singuliers sont identifiés. Premièrement, sur cette figure, le point A indique une zone pour laquelle l'estimation semble présenter une lacune. En effet, théoriquement, la profondeur de pénétration maximale ne devrait pas diminuer au cours du temps. Pourtant, nous verrons par la suite que cette évolution permet une bonne représentation des températures mesurées. De plus, au point B, i.e. pour un temps de 18 s, la forme est clairement mal estimée. Cette erreur est une conséquence directe de la méthode inverse que nous utilisons. La descente, qui est conditionnée par la variable adjointe, est perturbée par le fait que cette dernière soit nulle à l'instant final. Cette erreur sur le front à 18 s se répercute sur les températures mesurées entre 16 et 20 s et elle a donc une influence sur le critère quadratique.

### 5.2.4.2 Les températures calculées

Rappelons que la fonction minimisée est construite sur l'écart quadratique entre les températures mesurées et simulées. Utilisant les données expérimentales, ce critère ne peut être parfaitement nul. Dans cette partie, sont comparées, les températures calculées par rapport aux températures mesurées.

Tout d'abord, les positions théoriques et corrigées des thermocouples sont présentées sur la figure 5.10. Les corrections sont effectuées grâce aux relevés sur des coupes macrographiques sur lesquelles les thermocouples apparaissent.

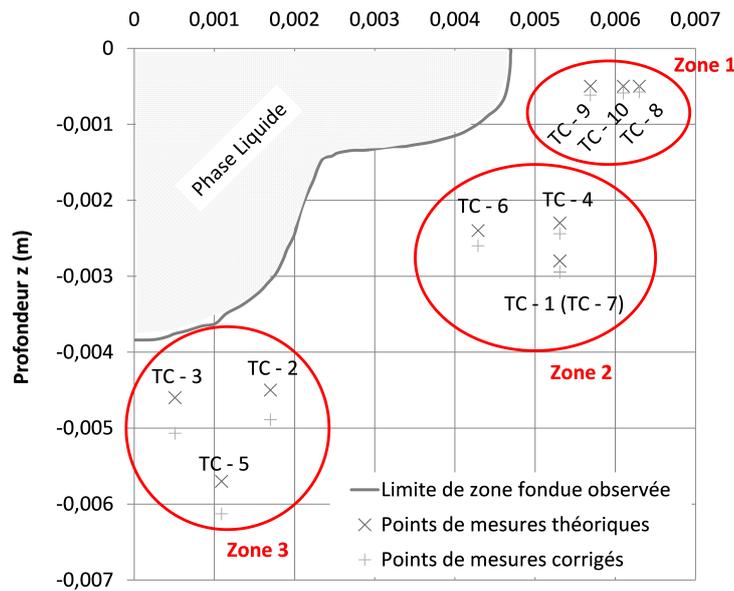


Figure 5.10 – Définition et correction des positions des capteurs thermiques

Les valeurs des positions corrigées, utilisées dans les simulations, sont regroupées dans le tableau 5.1.

Nom TC	TC - 1	TC - 2	TC - 3	TC - 4	TC - 5	TC - 6	TC - 7	TC - 8	TC - 9	TC - 10
r (mm)	5,31	1,7	0,51	5,31	1,09	4,29	5,31	6,3	5,69	6,1
z (mm)	-2,95	-4,89	-5,07	-2,44	-6,13	-2,6	-2,94	-0,57	-0,62	-0,59

Tableau 5.1 – Positionnement corrigé des thermocouples pour l'essai 20s1

Ensuite, afin d'identifier les erreurs responsables de ce résidu, nous représentons graphiquement les évolutions temporelles des températures en fonction de la zone de mesure (1, 2 ou 3 - figure 5.10). Sur les figures 5.11, 5.12 et 5.13, les traits interrompus sont utilisés pour les températures mesurées et des traits pleins pour les températures simulées.

Commençons par les mesures réalisées sous la zone fondue (zone 3 - figure 5.11).

Faisant le parallèle entre les profondeurs de pénétrations estimées (figure 5.9) et les températures mesurées sous la zone fondue (figure 5.11), nous observons que la remontée du

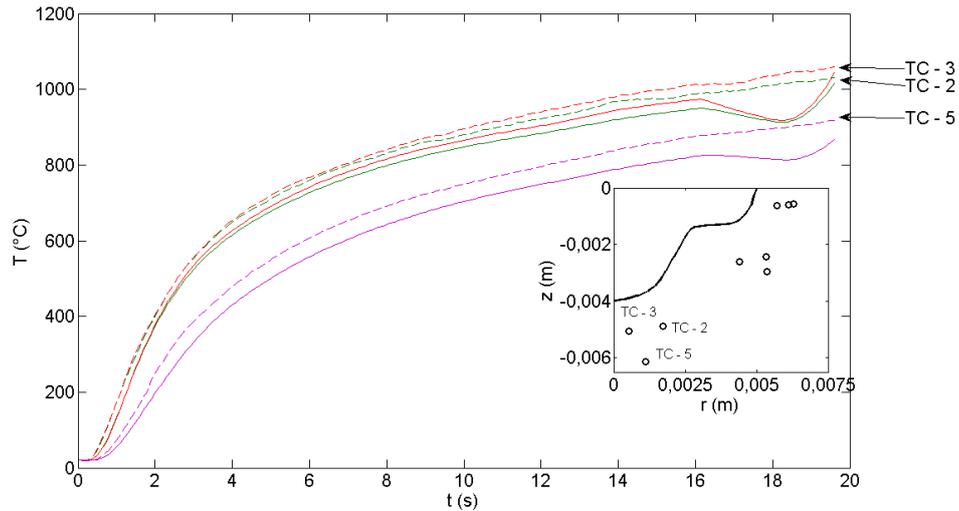


Figure 5.11 – Comparaison entre les températures mesurées (traits interrompus) dans la zone 3 et celles calculées (traits pleins)

front pour un temps d’approximativement 4 s (point A - figure 5.9) n’est pas visualisée sur les températures. Au contraire, malgré un biais évident sur les amplitudes, les évolutions numériques et expérimentales sont similaires.

S’agissant de la remontée du front présente au point B à  $t = 18$  s (figure 5.9), l’effet est clairement visible sur les températures. En effet, la frontière s’éloignant des points de mesure, nous observons une chute de température.

Dans la zone intermédiaire (zone 2 - figure 5.12), malgré une légère sous-évaluation des températures obtenues par le calcul, les évolutions simulées sont très proches de la réalité. Quelques itérations supplémentaires lors de la résolution du problème inverse auraient permis une amélioration de ces résultats.

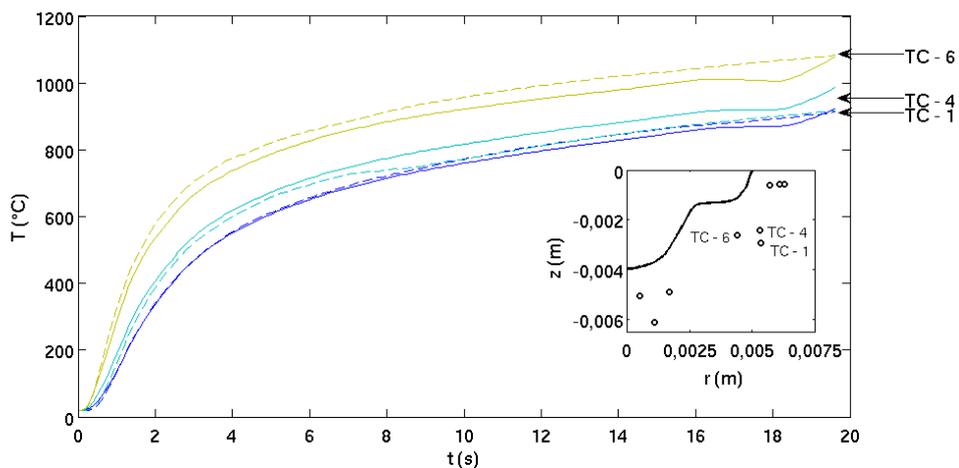


Figure 5.12 – Comparaison entre les températures mesurées (traits interrompus) dans la zone 2 et celles calculées (traits pleins)

Notons que sur la figure 5.12, l'influence de la condition initiale du problème adjoint ( $t = t_{fin}$ ) est encore présente pour les temps supérieurs à 16 s.

En surface (zone 1 - figure 5.13), une très bonne correspondance apparaît pour les deux mesures les plus éloignées (jusque 18 s). La mesure la plus proche de la zone fondue est numériquement surévaluée. Rappelons que cette zone est la plus critique en terme de modélisation (axisymétrie, paramétrisation du front, conditions aux limites, déplacement de la frontière, apport d'énergie surfacique, ...). Par conséquent, cet écart est très probablement causé par ces différents choix.

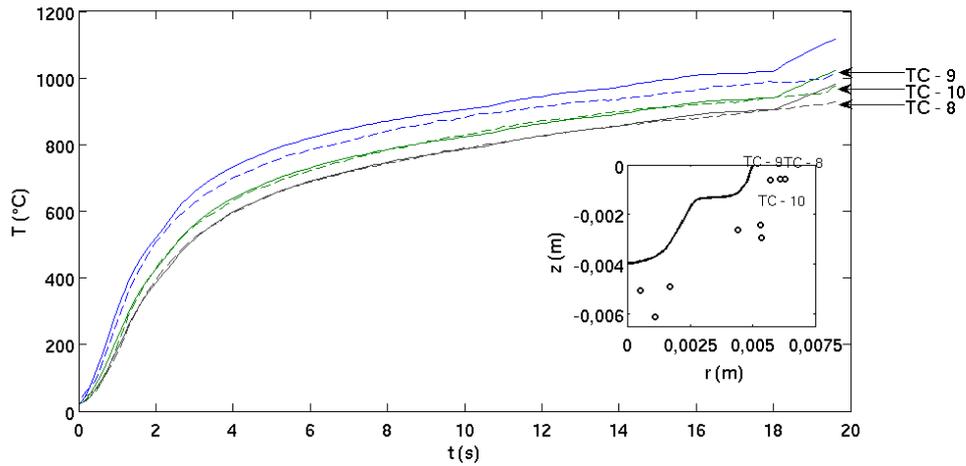


Figure 5.13 – Comparaison entre les températures mesurées (traits interrompus) dans la zone 1 et celles calculées (traits pleins)

### 5.2.4.3 Les erreurs

Ces premiers résultats du problème inverse sont assez satisfaisants mais quelques écarts peuvent cependant être observés. Rappelons les cinq sources d'erreurs qui peuvent être rencontrées dans ce type d'étude :

- l'erreur de modélisation,
- l'erreur commise par la paramétrisation du front,
- l'erreur due au bruit de mesure,
- l'erreur causée par l'aspect intrusif de la mesure par thermocouple,
- l'erreur résiduelle propre à la méthode inverse utilisée.

Dans notre étude, l'erreur causée par la paramétrisation est présente mais peut difficilement être quantifiée. L'erreur due au bruit de mesure est prise en compte avec le principe de l'écart (chapitre 3). Les imperfections de modélisation sont évidemment présentes et sont principalement localisées en surface de zone fondue. Elles existent en raison des hypothèses nécessaires à la construction de la simulation simplifiée.

L'aspect perturbateur de la mesure par thermocouple peut être responsable des écarts observés en certains points de mesure. Nous quantifierons cet effet dans le paragraphe suivant.

Pour finir, nous avons clairement observé, sur les précédents résultats, une conséquence de la méthode de régularisation itérative : le "blocage" de l'identification pour des temps proches de l'instant final. Nous avons pourtant supposé que, connaissant la forme finale de la zone fondue, cet effet serait très limité. Une correction sera aussi présentée par la suite.

### 5.2.5 Prise en compte des thermocouples - Modèle d'erreur

#### 5.2.5.1 Introduction - présentation de la méthode

Les résultats de l'estimation n'étant pas parfaitement satisfaisants, et après avoir identifié les différentes sources d'erreurs pouvant perturber la procédure, nous choisissons de quantifier l'influence de la mesure par thermocouple. En effet, de précédents travaux [27] relatifs à un autre procédé de soudage ont mis en évidence des perturbations parfois non négligeables dans le cadre de la résolution d'un problème inverse.

Méthode : La prise en compte des capteurs de mesure dans le problème inverse nécessiterait une géométrie en trois dimensions, rendant ainsi sa durée de résolution inenvisageable. La méthode que nous appliquons est donc la suivante :

Une première approximation de l'erreur due à la présence des thermocouples est obtenue grâce à une simulation tri-dimensionnelle dans laquelle l'évolution du front de fusion est imposée. Nous observerons ainsi, la légitimité de la correction des températures mesurées.

#### 5.2.5.2 Le modèle

Pour quantifier l'aspect intrusif du capteur, une simulation en trois dimensions est réalisée. La géométrie traitée (figure 5.14) est un quart de la pièce réelle dans laquelle un thermocouple est introduit en essayant de représenter au mieux les conditions expérimentales.

Le modèle prend en compte le trou de perçage, la boule du thermocouple et un des fils du thermocouple, pour des raisons de symétrie. En effet, le volume représentant le thermocouple est positionné au fond d'une cavité représentative d'un perçage de  $650 \mu m$  de diamètre. Par construction, les faces latérales de la géométrie sont des plans de symétrie. Les thermocouples sont donc positionnés sur une de ces faces afin de réduire le nombre d'éléments. De plus, la tige d'alumine n'est pas représentée et l'espace occupé par l'air n'est pas maillé (figure 5.15).

Expérimentalement, les thermocouples sont soudés au fond des perçages. Donc, dans la simulation, un contact parfait est imposé entre la pièce et la boule du thermocouple.

Rappelons que les thermocouples sont fabriqués, au sein du laboratoire, à partir de fils de chromel et d'alumel de  $50 \mu m$  de diamètre (figure 5.14).

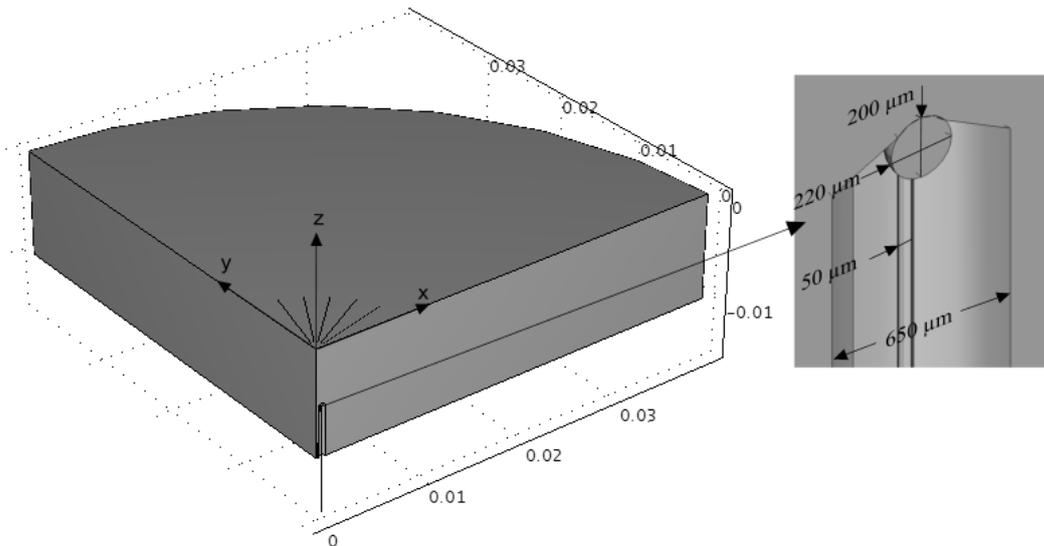


Figure 5.14 – Géométrie du modèle 3D avec thermocouple

Cette simulation est réalisée de la même manière que la simulation simplifiée utilisée pour la résolution du problème inverse. En d'autres termes, seul un problème de diffusion thermique associé à un algorithme de déplacement du maillage (méthode ALE pour le déplacement de l'isotherme de fusion) sont considérés. Pour ces résolutions, les conditions aux limites sont présentées sur la figure 5.15.

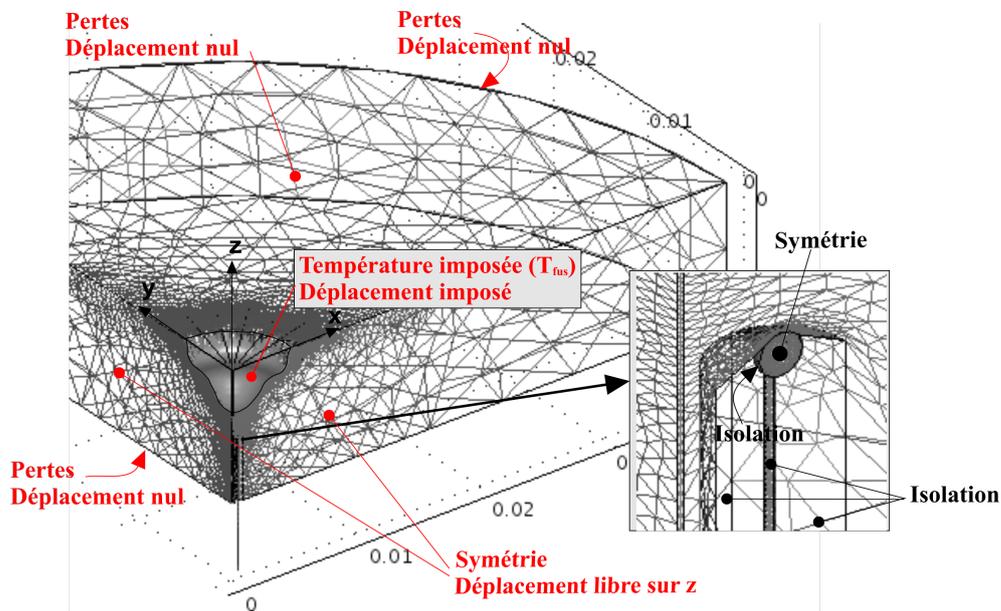


Figure 5.15 – Représentation des conditions aux limites

Sur les faces supérieure, inférieure et latérale des pertes par convection sont considérées (équation 5.1) :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h_{cv}(T - T_{\infty}) \quad (5.1)$$

avec  $h_{cv} = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  et  $T_{\infty} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Des conditions de symétrie sur les deux tranches verticales, soit :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (5.2)$$

Les frontières du thermocouple et du trou sont soumises à une condition d'isolation thermique :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (5.3)$$

La condition 5.3 est utilisée car les phénomènes thermiques présents dans le perçage sont difficilement quantifiables. De ce fait, **nous envisageons le cas le plus extrême en terme de perturbation**, c'est-à-dire, lorsque l'évacuation de l'énergie accumulée par la boule du thermocouple, ne peut se faire que par conduction dans les fils. Nous obtiendrons donc une valeur maximisée de l'erreur engendrée par la présence du thermocouple.

La température de la frontière simulant le front de fusion est imposée à la température du solidus (1385 °C).

Les propriétés thermophysiques du capteur sont issues de documentation technique propre aux matériaux constitutifs des thermocouples [1]. Les valeurs que nous utilisons (tableau 5.2) sont supposées constantes, aussi bien pour l'acier que pour le thermocouple. En effet, les non-linéarités créées par des propriétés définies en fonction de la température ont tendance à entraîner des temps de calcul importants (> 24h). De plus, rappelons que l'évolution du front n'est pas parfaitement en adéquation avec la réalité donc la précision de propriétés variables n'est pas nécessaire ici. Dans le tableau 5.2, les données du thermocouple de type K sont des moyennes des propriétés des fils de chromel et d'alumel. En effet, nous ne représentons qu'un demi thermocouple, cette moyenne est donc réalisée pour tenir compte des deux alliages.

Thermocouple			Acier		
$\lambda$	29	$W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda$	25	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$c_p$	523	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	$c_p$	480	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$\rho$	8600	$kg.m^{-3}$	$\rho$	7800	$kg.m^{-3}$

Tableau 5.2 – Propriétés thermophysiques moyennes d'un thermocouple de type K et de l'acier 316L

Le déplacement du front (figure 5.16) est issu de la résolution d'une simulation multiphysique (paragraphe 5.3).

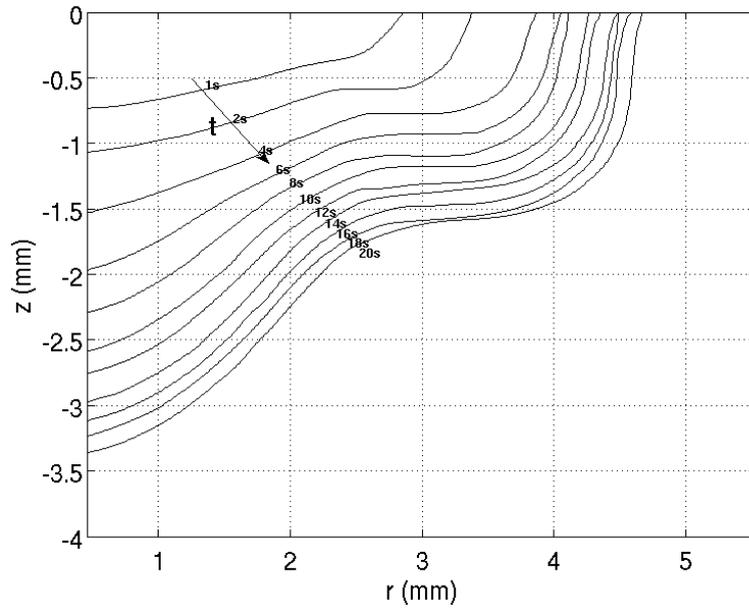


Figure 5.16 – Positions du front fonction du temps issues du problème multiphysique

### 5.2.5.3 Résultats

Les températures en trois points sont analysées (figure 5.17), l'un positionné sur la face sans thermocouple (point A), un autre sur la surface de contact entre le thermocouple et la pièce (point B) et un dernier dans le volume du thermocouple entre les deux fils (point C). Ce dernier point correspond à la jonction entre les deux fils, là où la génération de la force électromotrice est supposée générée.

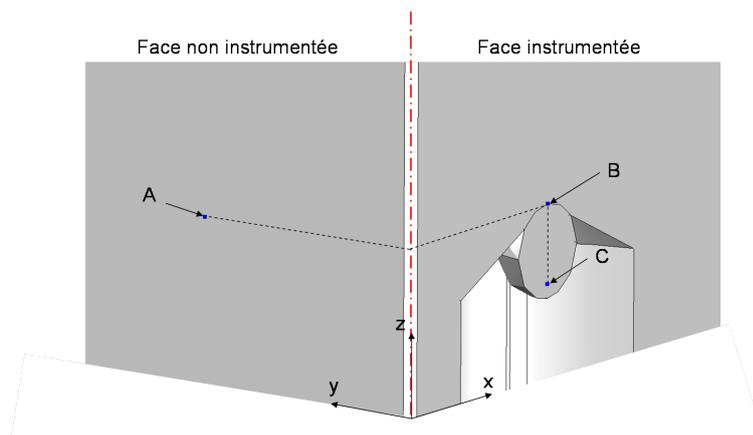


Figure 5.17 – Position des points de mesure A, B et C

La température dite "sans thermocouple" (point A) est considérée comme la valeur réelle non perturbée par le thermocouple. La valeur mesurée par le thermocouple est censée être la température observée au point C. La différence des deux représente donc l'erreur causée par la présence du thermocouple.

Le modèle 3D a été utilisé pour étudier l'erreur de mesure selon la position du thermocou-

## 5.2 Inversion des données expérimentales

ple et l'orientation du perçage. Cela nécessite de reconstruire la géométrie et le maillage pour chaque position. En effet, l'importance de la perturbation sur les températures mesurées dépend, en partie de l'orientation des perçages par rapport aux surfaces isothermes (ou au flux) et en partie de l'amplitude du flux dans la zone de mesure.

Pour chaque position, nous avons calculé l'erreur absolue ( $T_C - T_A$ ) en fonction du temps. L'analyse des résultats est présentée en fonction de la zone d'implantation des capteurs (figure 5.18).

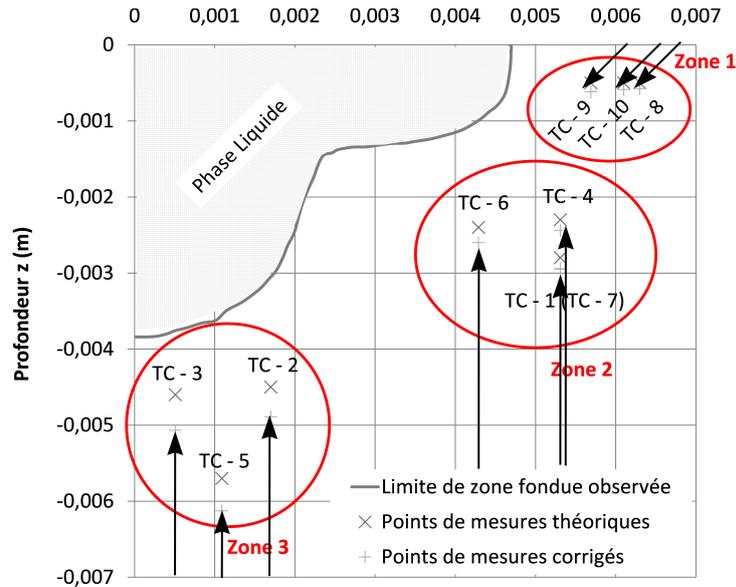


Figure 5.18 – Orientation des perçages (flèches) et positions des capteurs thermiques

Pour commencer, les erreurs observées sur les thermocouples 2, 3 et 5 (zone 3 - figure 5.10), situés sous la zone fondue, à proximité de l'axe de symétrie, sont étudiés. Rappelons que pour ces trois capteurs, l'implantation est réalisée à partir de la face inférieure.

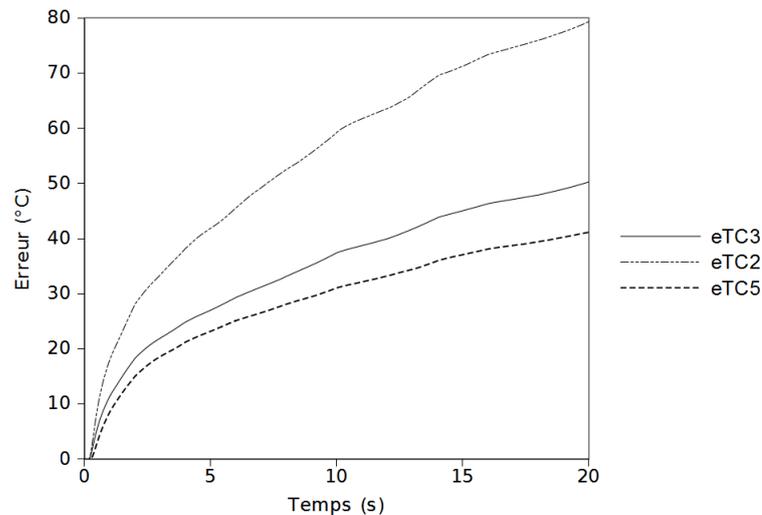


Figure 5.19 – Erreur de mesure pour les thermocouples 2,3 et 5

Sur la figure 5.19, la première information qui peut être observée concerne le signe de ces

erreurs. En effet, dans ce cas, la mesure par thermocouple surévalue la valeur réelle de la température. Cette surévaluation résulte de la faible capacité de l'ensemble "thermocouple - trou" à évacuer la chaleur provenant de la zone fondue. La géométrie du thermocouple lui permet de recevoir l'énergie sans pouvoir ensuite l'évacuer. Les amplitudes maximales des erreurs sont de l'ordre de  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  à  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  en fonction de la position du thermocouple par rapport à la zone fondue.

Dans la seconde zone, seul le thermocouple 6 est simulé (figure 5.20). Dans cette zone les thermocouples sont aussi positionnés à partir de la face inférieure.

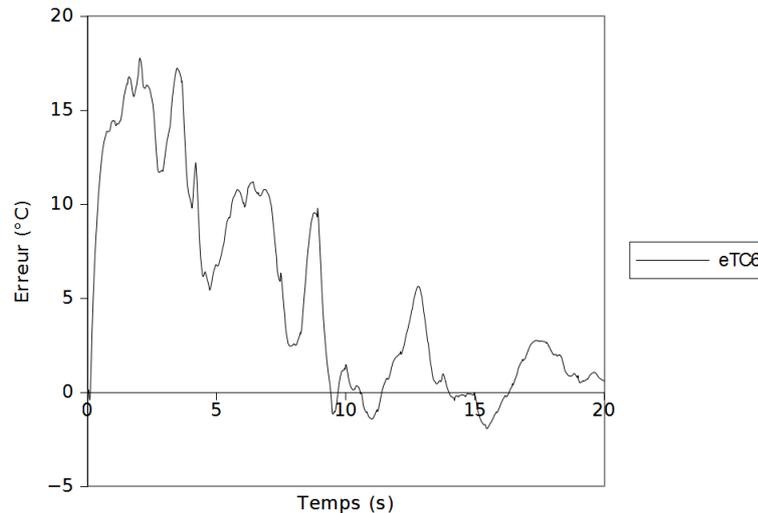


Figure 5.20 – Erreur de mesure pour le thermocouple 6

Dans ce cas, l'erreur est très faible ( $15\text{ }^{\circ}\text{C} \approx 1\%$  de la valeur maximale) et étant donnée l'allure "perturbée" de la courbe, il s'agit plutôt de l'effet du déplacement du maillage que nous observons. Dans ce cas, il n'y a pas de remaillage durant la résolution (contrairement au problème direct 2D axisymétrique) et à certains endroits, le déplacement des nœuds, déterminé par la méthode ALE peut perdre en qualité et perturber la solution calculée. De plus, rappelons que les capteurs des zones 2 et 3 sont instrumentés par la face arrière ce qui positionne les percages de façon parallèle aux surfaces isothermes et donc réduit l'effet de stockage observé dans la zone 3. Les simulations des autres thermocouples de la zone 2 ne sont pas réalisées. Les capteurs TC-4 et TC-1 sont plus éloignés de la zone fondue que le TC-6 et leurs orientations sont similaires à ce dernier, à savoir parallèles aux isothermes. Par conséquent, les perturbations qu'ils engendrent sont aussi négligeables.

Pour la troisième zone, les thermocouples sont introduits à une profondeur de  $-0,5\text{ mm}$  selon un angle de  $45^{\circ}$ .

Dans cette zone, le flux de chaleur étant, principalement selon le rayon, une erreur maximale d'environ  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  peut être observée (figure 5.21).

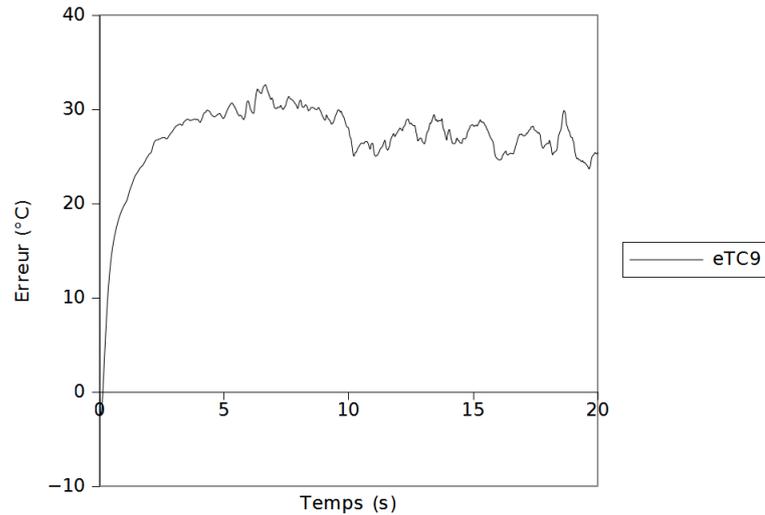


Figure 5.21 – Erreur de mesure pour le thermocouple 9

#### 5.2.5.4 Bilan

Nous avons montré numériquement que la mesure par thermocouple, dans de forts gradients de température, peut être perturbée par l'instrument lui-même. Cette perturbation dépend de l'amplitude du gradient dans lequel se place la mesure, mais aussi de l'orientation de l'instrumentation (thermocouple et perçage) par rapport à ce gradient. Lorsque les perçages sont dans le sens du flux, la chaleur ne peut être évacuée ce qui implique une augmentation de température mesurée pouvant aller jusqu'à 80 °C. À l'inverse, en réalisant les perçages perpendiculairement au flux, la zone de mesure est moins perturbée, ce qui est le cas des thermocouples des zones 1 et 2.

Le biais ainsi créé est différent pour chaque capteur et évolue en fonction du temps. De ce fait, les températures mesurées doivent être corrigées indépendamment les unes des autres. Compte tenu des faibles perturbations des thermocouples présents dans la zone 2 (TC 1, 6 et 4), aucune correction ne sera appliquée sur les mesures de ces derniers. De plus, l'évolution du front en surface étant connue grâce aux données vidéos et les erreurs étant relativement faibles (2,5% de la température maximale), les températures issues des thermocouples de la zone 1 (TC 8, 9 et 10) ne sont pas modifiées non plus. Par conséquent, nous ne tenons compte de l'aspect intrusif des capteurs que pour les thermocouples situés en profondeur (zone 3).

Nous avons donc résolu de nouveau le problème inverse en utilisant des mesures corrigées des précédentes erreurs. La figure 5.22 présente la comparaison des températures mesurées (zone 3) avec celles obtenues numériquement à l'issue de la résolution du problème inverse.

Cette figure illustre l'intérêt d'une telle correction. En effet, les écarts précédemment observés (figure 5.11) sont presque entièrement compensés. Il est à noter que cette correction, étant appliquée après la stabilisation du critère de convergence, permet une réduction de sa valeur mais n'améliore en rien sa convergence.

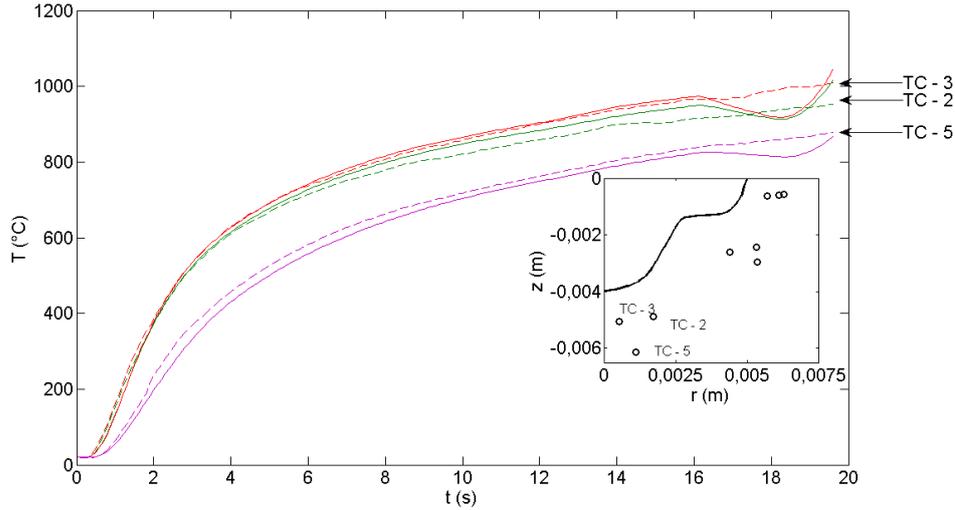


Figure 5.22 – Comparaison des températures expérimentales corrigées (traits interrompus) avec les températures simulées (traits pleins) - zone 3

### 5.2.6 Perturbation à l’instant final

Nous avons observé que les résultats de l’inversion sont perturbés par la méthode de détermination de la direction de descente. En effet, dans cette étude, la descente est déterminée par la résolution d’un problème adjoint. Ce dernier est résolu à rebours et a pour condition initiale  $p(t = t_{fin}) = 0$ . Or, les sources de ce problème sont les écarts de températures mesurées et simulées. Donc, même si un écart existe à  $t = t_{fin}$ , la direction de descente restera nulle. De plus, la continuité (temporelle) de la solution implique que les variables adjointes calculées soient perturbées durant un certain temps : dans notre cas au moins 2 s (de 18 à 19,6 s).

Pour compenser cet effet, une méthode consiste à augmenter la durée d’étude de 30% pour éviter que la perturbation intervienne dans le domaine d’intérêt ([76]). Dans notre cas, ce n’est pas applicable en raison de la forme, issue de la macrographie, imposée à l’instant final. Aussi, nous corrigeons la position du front à 18 s en l’imposant égal à celui obtenu à 16 s (figure 5.23).

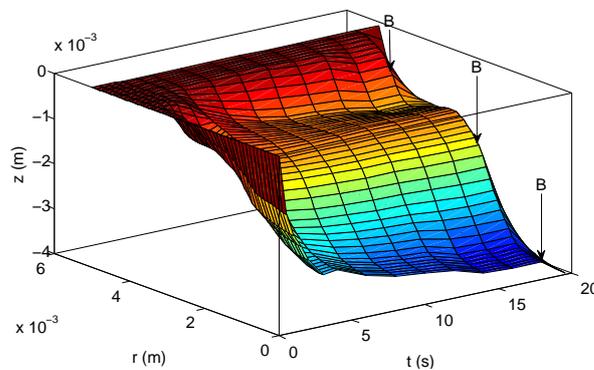


Figure 5.23 – Représentation 3D de l’évolution du front estimée après correction du résultat du dernier pas de temps

## 5.2 Inversion des données expérimentales

En effet, la forme du bain est presque stationnaire pour des durées supérieures à 15 s. En d'autres termes, la forme évolue peu et le faible déplacement restant à effectuer peut être déterminé malgré la perturbation sur l'estimation.

Les figures 5.24, 5.25 et 5.26 présentent les comparaisons de températures dans chaque zone avec la modification sur la position du front à 18 s.

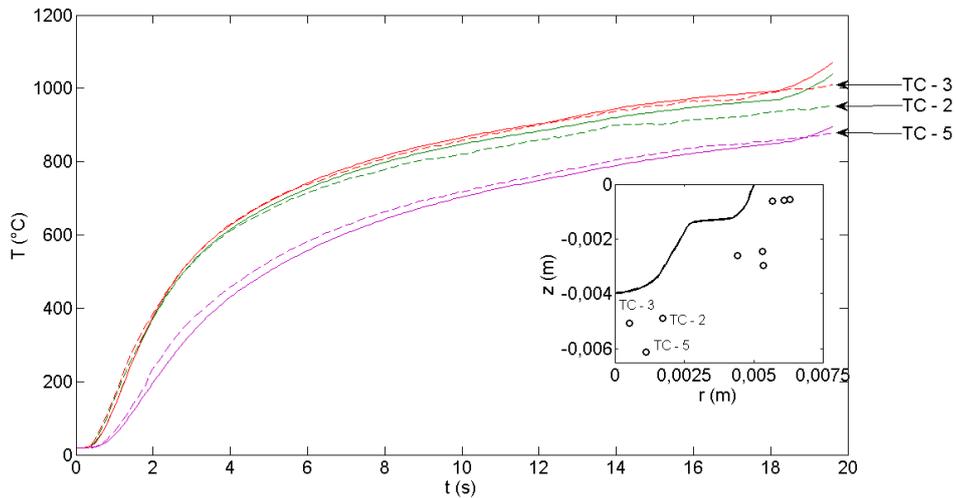


Figure 5.24 – Comparaison des températures expérimentales corrigées (traits interrompus) avec les températures simulées après correction de la forme (traits pleins) - zone 3

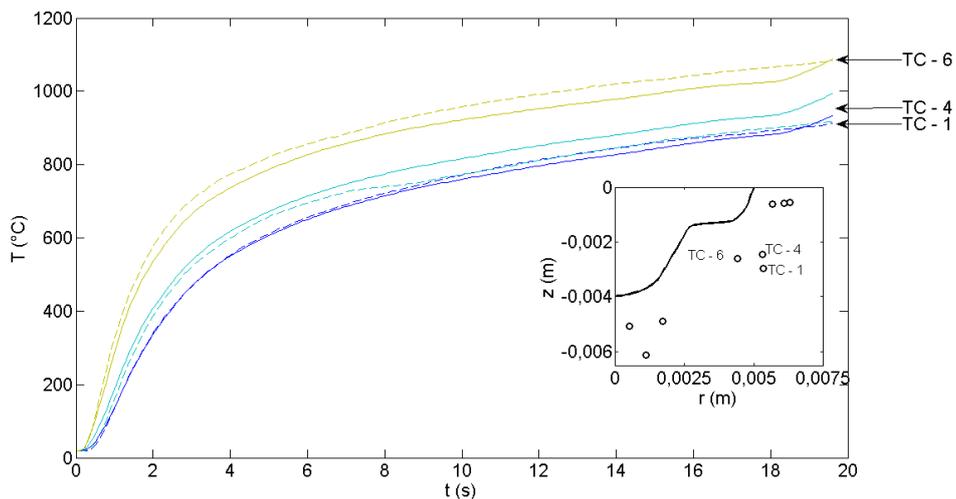


Figure 5.25 – Comparaison des températures expérimentales corrigées (traits interrompus) avec les températures simulées après correction de la forme (traits pleins) - zone 2

L'amélioration que cette modification entraîne est principalement visible sur les mesures en profondeur (zone 3 - figure 5.24). Néanmoins, cela met à jour une erreur sur la position finale du

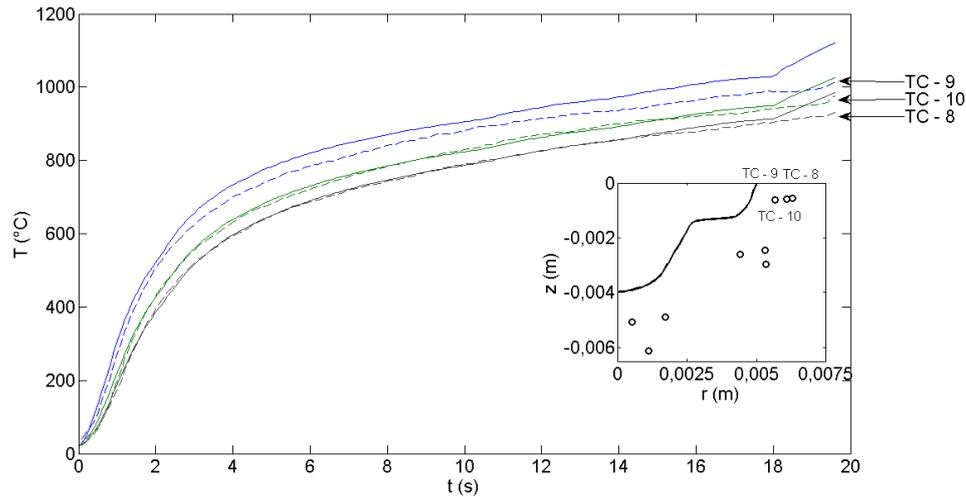


Figure 5.26 – Comparaison des températures expérimentales corrigées (traits interrompus) avec les températures simulées après correction de la forme (traits pleins) - zone 1

front ou de la température à laquelle il se trouve. En effet, pour des évolutions cohérentes avec la réalité jusqu'à 18 s, toutes les températures finales sont largement surestimées.

### 5.2.7 Conclusion

Les résultats de cette inversion, bien que non parfaits (résidu moyen d'environ  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  par mesure) permettent l'obtention d'un champ de température tout à fait cohérent. Un biais, dû à la représentation de l'apport d'énergie, est cependant observé en surface de la pièce. Sur la mesure la plus proche du bain (TC-9), la modélisation surdimensionne la température alors que celles observées à quelques millimètres de ce point (TC-10 et TC-8) sont très proches des valeurs expérimentales. Les autres écarts résiduels proviennent des erreurs de modélisation comme la valeur imposée sur la frontière représentant le front de fusion ou celles prises pour les propriétés thermophysiques.

L'évolution du front de fusion estimée nous permet de visualiser correctement la forme de la zone fondue au sein de la pièce, elle sera donc comparée aux données obtenues par simulation multiphysique afin d'analyser les résultats de cette dernière.

## 5.3 Comparaison : Expérimental - Multiphysique

### 5.3.1 Introduction

Cette dernière étape est une confrontation des résultats numériques, obtenus par la simulation multiphysique, à ceux mesurés lors des deux séries d'essais expérimentaux. Les points de comparaison sont les températures mesurées dans la phase solide, l'évolution du front en surface et la forme finale de la zone fondue. Dans cette partie aussi, le cas expérimental de référence est l'essai 20s1 car, rappelons-le, il présente les résultats les plus cohérents vis à vis de l'hypothèse d'axisymétrie.

Le modèle multiphysique utilisé a déjà été présenté dans le chapitre 2. Nous rappellerons brièvement ici les phénomènes physiques pris en compte ainsi que les paramètres du modèle retenu. Pour cette confrontation, le modèle prend en compte la déformation de la surface libre. En effet, la faible hauteur d'arc implique une forte pression d'arc donc une déformation importante et les écoulements s'en trouvent modifiés.

### 5.3.2 Présentation de la simulation retenue

Le chapitre 2 a permis de mettre en évidence les phénomènes physiques les plus influents sur la forme de la zone fondue ainsi que sur le champ de température. Rappelons que les valeurs des paramètres ont été estimés au mieux à partir des données de la littérature.

La simulation multiphysique est réalisée à partir d'un modèle 2D axisymétrique limité à l'anode prenant en compte les équations couplées de l'équation de la chaleur, de la mécanique des fluides (Navier-Stokes et continuité) et de l'électromagnétisme. Les moteurs de l'écoulement considérés sont les forces de Lorentz, les forces de flottabilité ainsi que l'effet Marangoni à la surface du bain liquide. De plus, la déformation de la surface libre du liquide est considérée. Son déplacement est géré de manière couplée avec le problème de mécanique des fluides à l'aide de la méthode ALE. La déformation de la surface libre est gouvernée par la pression d'arc, la tension superficielle et sa dépendance à la température (effet Marangoni), la pesanteur et la pression dynamique imposée par l'écoulement au sein du métal.

Les diverses équations à résoudre dans le domaine et les conditions aux limites ne sont pas rappelées ici. Les valeurs des paramètres de modélisation tels que les propriétés thermophysiques ou les caractéristiques du maillage sont celles présentées en annexe B.

#### 5.3.2.1 Propriétés physiques et paramètres des sources

Pour cette simulation comme précédemment, la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur massique à pression constante sont issues de la littérature [90], de même que la viscosité dynamique ([65]). Les évolutions de ces propriétés en fonction de la température ainsi

que les autres propriétés physiques sont présentées dans le chapitre 2.

### 5.3.2.2 La géométrie

La géométrie mise en œuvre pour cette résolution est adaptée pour la gestion du déplacement. En effet, le volume dans lequel doit apparaître la phase liquide est séparée en deux parties : "Volume\_1" et "Volume\_2" (figure 5.27). Seules les mailles de la partie supérieure subissent un déplacement (méthode ALE) afin de limiter les temps de calcul, puisque cela permet de réduire le nombre de degrés de liberté du problème.

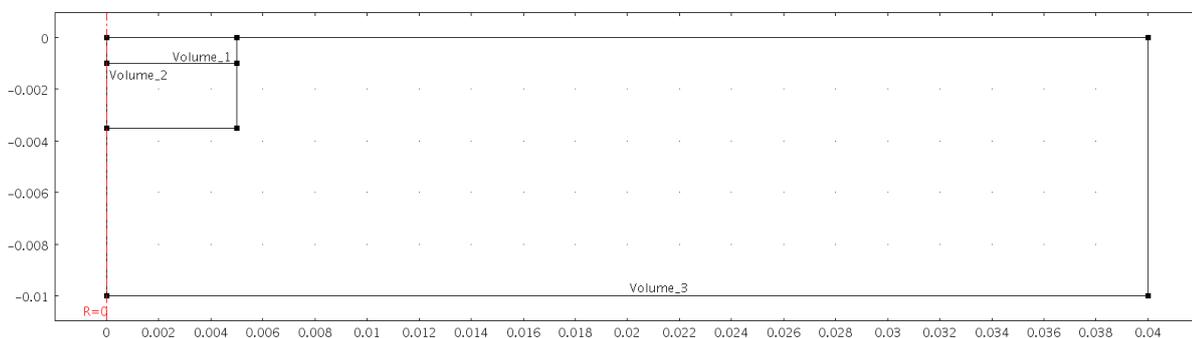


Figure 5.27 – Définition de la géométrie du modèle multiphysique 2D axisymétrique

### 5.3.2.3 Le maillage

Compte tenu de l'étude de convergence spatiale présentée dans le chapitre 2 et afin d'éviter les distorsions de mailles trop importantes, nous avons retenu, dans ce cas, une discrétisation spatiale en éléments triangulaires de  $50 \mu m$  de côté. Lors de l'étude de convergence spatiale nous avons montré que le maillage n'avait plus d'effet sur la solution pour une discrétisation en éléments quadrangles inférieure à  $25 \mu m$  de côté. Cependant, la solution à  $50 \mu m$  restait satisfaisante d'autant plus que nous avons choisi des paramètres de sources plus pénalisants.

Pour presque toutes les équations, ont été utilisé des éléments triangulaires quadratiques. Pour le problème électromagnétique, ont été retenu des éléments cubiques. Le nombre total de degrés de liberté est d'environ 200000.

### 5.3.2.4 Champs de température et champs de vitesse

La figure 5.28 présente des champs de température et de vecteurs vitesse obtenus sur la géométrie déformée. La coloration surfacique représente le champ de température, les flèches sont normalisées en amplitude mais représentent le champ de vecteurs vitesse et quelques iso-valeurs de températures (non identifiées) indiquent l'influence de l'écoulement sur les transferts

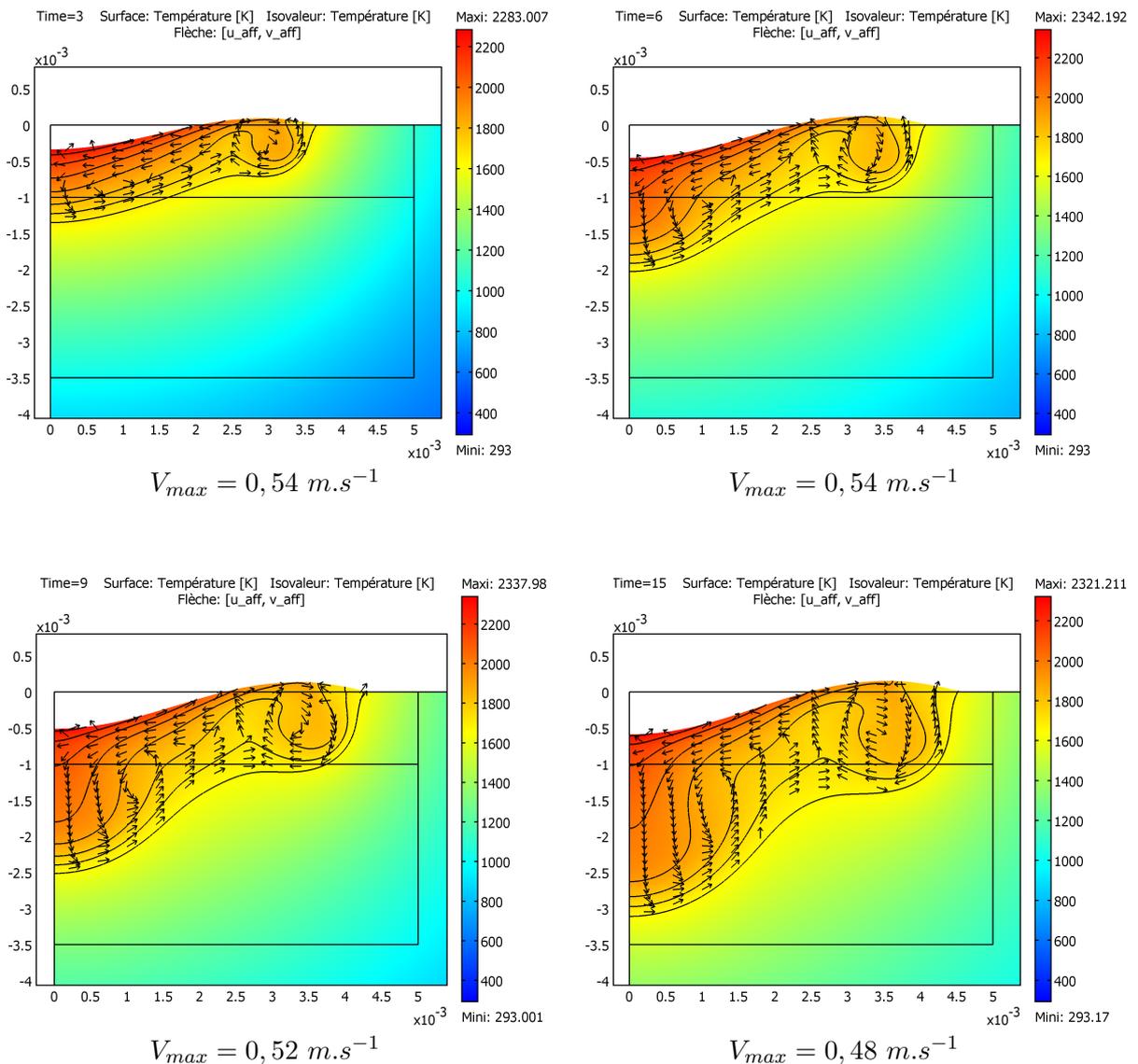
### 5.3 Comparaison : Expérimental - Multiphysique

thermiques dans la phase liquide.

Sur la figure 5.28, il apparaît l'augmentation de la déformation de la surface libre au cours du temps. Le modèle prédit une déformation maximale de  $0,45 \text{ mm}$  à  $t = 20 \text{ s}$ . Cette valeur qui a atteint un niveau stationnaire peut sembler élevée au regard des valeurs données dans la littérature. Par exemple, A. Traidia et al. obtiennent des déformations de l'ordre de  $0,3 \text{ mm}$  pour  $200 \text{ A}$  [115], H. G. Fan et al., quant à eux, prédisent des déformations de  $0,2 \text{ mm}$  pour  $150 \text{ A}$  avec une hauteur d'arc de  $3 \text{ mm}$  [40]. Néanmoins, cette déformation reste cohérente étant donné notre hauteur d'arc bien plus faible ( $1,2 \text{ mm}$ ).

Par ailleurs, la température minimale reste égale à la température initiale ( $r = 40 \text{ mm}$ ). Ce qui valide la faible influence de la condition sur cette limite (chapitre 2).

De plus, les températures maximales restent bien inférieures à celle de vaporisation ce qui justifie le fait de ne pas prendre en compte ce phénomène.



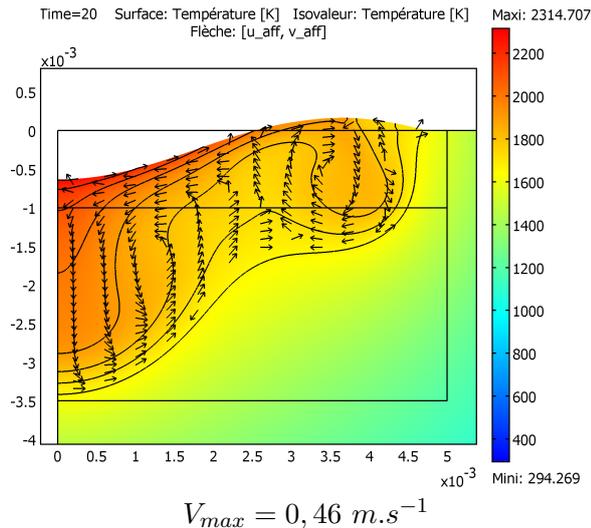


Figure 5.28 – Champs de température et de vecteurs vitesse à différents instants (3s, 6s, 9s, 15s et 20s)

### 5.3.3 Comparaison entre températures calculées et températures mesurées

Les températures calculées ont été comparées aux températures mesurées par les thermocouples (avec et sans correction). Pour plus de lisibilité, cette comparaison est présentée par zone (figure 5.10) : les thermocouples de surface (zone 1), les thermocouples "intermédiaires" (zone 2) et les thermocouples de profondeur (zone 3).

#### Remarque :

De la même manière que pour la résolution du problème inverse, les positions des capteurs de température sont déterminés à l'aide des macrographies. Les températures calculées par le modèle multiphysique sont donc extraites en ces mêmes points, en supposant la non-évolution de ces points de mesure au cours du soudage. Les coordonnées retenues sont résumées dans le tableau 5.1 (paragraphe 5.2.5).

De manière générale, les températures simulées sont cohérentes avec les températures mesurées. Néanmoins, les écarts sont plus ou moins importants selon la zone.

Dans la zone 1, les températures simulées commencent par évoluer trop lentement, mais au delà de dix secondes, les pentes des courbes restent trop importantes et les températures sont donc surestimées. Le positionnement de cette zone rend les températures visualisées particulièrement sensibles à la distribution de l'apport surfacique d'énergie. Dans le cas présent, ce premier graphique laisse supposer une variation temporelle de l'apport de chaleur réel. En l'occurrence, il serait plus important ou plus concentré durant les dix premières secondes et légèrement plus faible ensuite.

Dans la zone 2, le comportement des températures simulées vis à vis des températures mesurées est proche de celui de la précédente zone. Notons cependant, que le moment de transition entre la sous-évaluation et la surévaluation est plus proche de l'instant final, l'erreur finale est donc plus faible. Dans cette zone, les variations de température sont les conséquences du flux

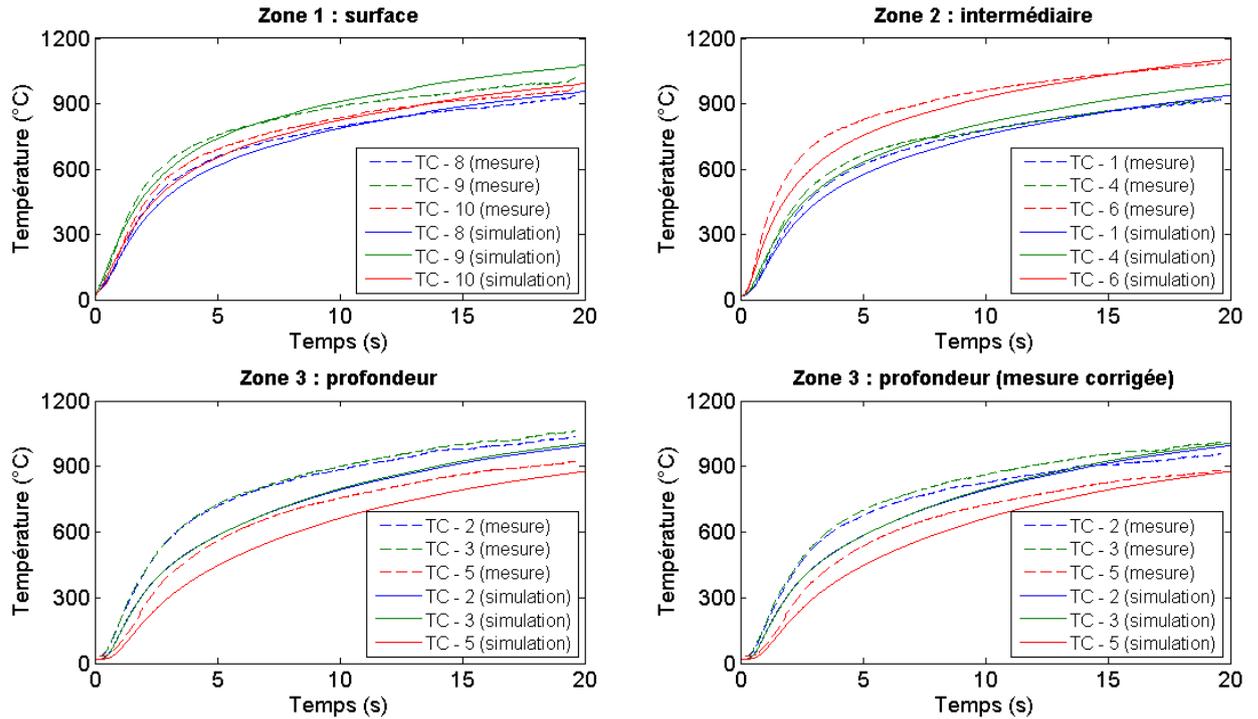


Figure 5.29 – Évolution des températures mesurées et simulées

de chaleur amené en périphérie de la zone fondue par les forces thermocapillaires. Ces forces sont dans ce cas générées par l'effet Marangoni, lui-même étant une fonction de la température et du taux de soufre. La bonne adéquation des températures à l'instant final valide le taux de soufre considéré dans ce cas (45 ppm). Cependant, le gradient de température en surface a aussi une incidence sur la forme et la position du rouleau. Donc ces courbes illustrent aussi un manque d'énergie (ou de sa concentration) en surface de zone fondue durant les premiers instants.

Dans la zone 3, les températures simulées sont sous-évaluées de manière homogène pour tous les thermocouples. De plus, nous avons montré précédemment que dans cette zone les températures mesurées sont surdimensionnées du fait de la présence du capteur. Connaissant cette erreur, les valeurs mesurées sont corrigées (figure 5.29). Cette modification permet d'obtenir, dans la zone 3, une meilleure adéquation des résultats numériques et expérimentaux. Cependant, de la même manière que dans la zone 2 (intermédiaire), la montée en température durant les quinze premières secondes n'est pas assez rapide.

La zone 3 correspond au bas de la zone fondue dans lequel le champ de température est une image des écoulements dans le métal liquide. Cet écart illustre donc le manque de pénétration de la zone fondue, ce qui sera confirmé lors de la comparaison de la forme de bain calculée avec celle observée sur la macrographie. Plusieurs raisons peuvent expliquer cela : soit l'apport d'énergie en surface de zone fondue n'est pas assez concentré, soit la contribution des forces de Lorentz est sous-dimensionnée. Cette dernière raison revient à remettre en cause la distribution de la densité de courant apportée. En effet, l'amplitude des forces de Lorentz dépend de la concentration de la densité de courant. Une dernière cause plausible concerne la déformation de la surface du bain,

qui étant maximale au centre, va favoriser ou non la pénétration de la phase liquide.

Ainsi un meilleur accord entre le calcul et la mesure pourrait être obtenu en ajustant : les distributions des sources de chaleur et de densité de courant, le rendement et son évolution en fonction du temps ou encore la distribution de la pression de l'arc.

### 5.3.4 Comparaison des largeurs de bain en surface

La figure 5.30 montre la comparaison entre l'évolution temporelle du front théorique et celle du front expérimental.

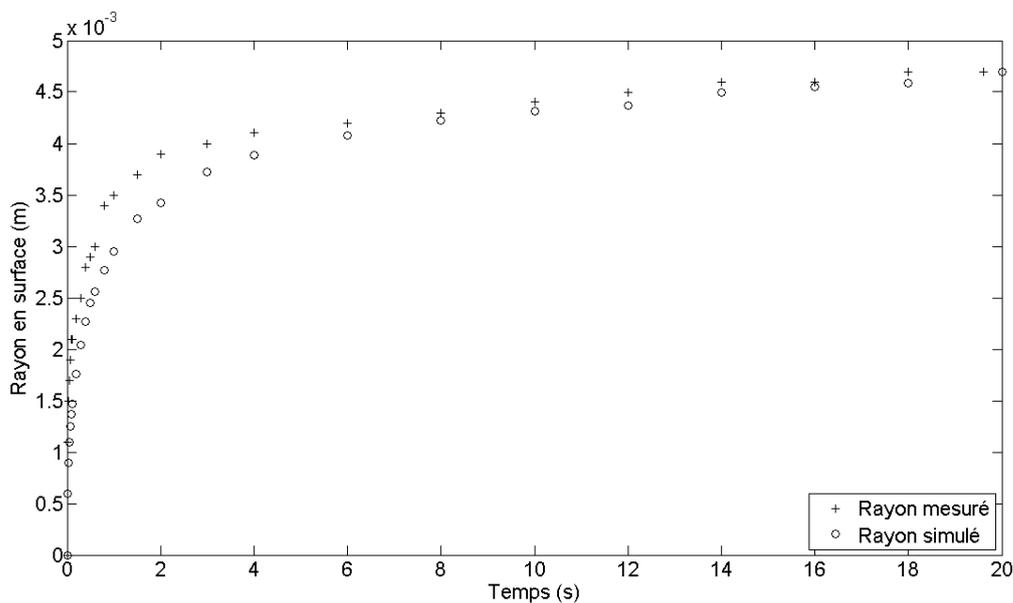


Figure 5.30 – Comparaison entre les rayons du bain liquide obtenus numériquement et expérimentalement

Rappelons que sur ce graphique, la position du front théorique est déduite de la position de l'isotherme du solidus. La figure 5.30 montre que les demi-largeurs de bain sont sous-estimées par le modèle sur les dix premières secondes, ce qui indique également un trop faible apport d'énergie en surface. En effet, sur la surface de la géométrie, la distribution de température (donc la position du front) est principalement une résultante de la source de chaleur. L'écoulement dû à l'effet Marangoni étant validé par les résultats en température, il est considéré comme correctement dimensionné.

Notons que pour cette validation aussi, la température supposée des fronts peut être une source d'erreur. Néanmoins, la bonne adéquation des positions du front théorique et expérimental aux instants finaux conforte notre hypothèse.

### 5.3.5 Comparaison des formes finales de zones fondues

Pour cette confrontation, l'hypothèse considérant la limite observée sur la coupe macrographique (figure 5.31) comme étant la ligne représentative de l'isotherme du solidus, reste appliquée dans cette analyse.

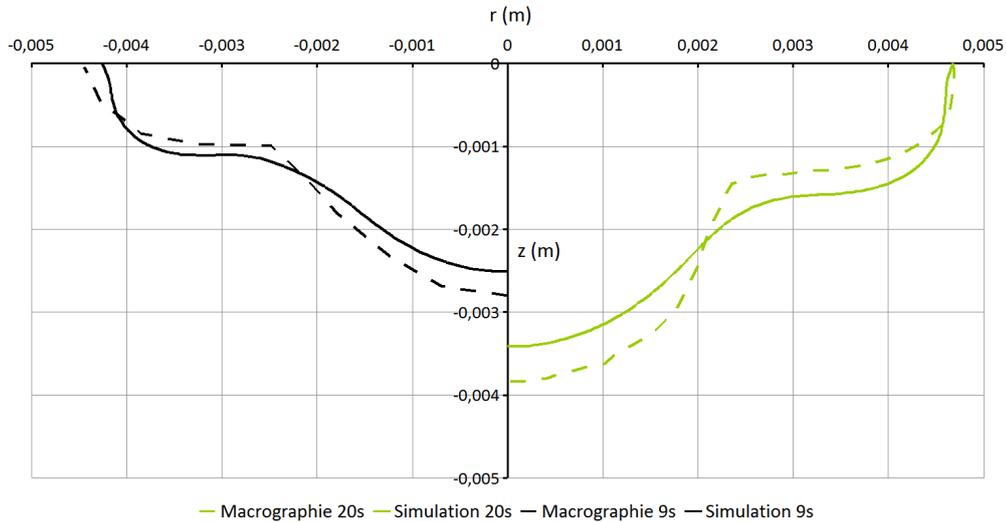


Figure 5.31 – Comparaison des limites maximales de zones fondues mesurées et calculées à 9 et 20 s

Sur la figure 5.31, la comparaison des "limites maximales" de zone fondue obtenues numériquement et théoriquement à l'instant final et après 9 s d'essai, confirme les précédentes observations. Premièrement, la largeur du bain simulé est cohérente bien que légèrement moins importante que celle obtenue expérimentalement. Deuxièmement, le "rouleau" engendré par l'effet Marangoni est de forme similaire aux observations macrographiques, bien que légèrement surdimensionné. Troisièmement, la profondeur de pénétration théorique n'est pas suffisante confirmant ainsi les conclusions réalisées lors de l'analyse des températures.

De ces comparaisons, il ressort que la répartition de la chaleur au sein de la zone fondue n'est pas optimale. Une quantité trop importante de l'énergie est apportée en périphérie alors qu'il en manque en profondeur. Dans le métal liquide, les mouvements fluides sont responsables, pour une grande partie, de cette redistribution énergétique. Cela implique qu'un ou plusieurs moteurs de l'écoulement sont mal dimensionnés. En l'occurrence, une mauvaise estimation des forces de Lorentz pourrait être la cause de ce type d'écart. En effet, pour une source électrique plus concentrée, les forces électromagnétiques seraient d'amplitudes plus importantes et favoriseraient les écoulements vers la partie basse de la zone fondue. L'écoulement en périphérie s'en trouverait atténué et les formes obtenues numériquement se rapprocheraient des données expérimentales. Notons qu'une pression d'arc plus importante augmenterait la déformation et favoriserait donc la pénétration du bain. Cependant, la valeur de déformation obtenue dans la simulation semblait déjà importante au regard des résultats observés dans la littérature.

En mettant en parallèle les mesures de température et de forme de bain fondu, nous pouvons conclure que les propriétés thermophysiques doivent être légèrement erronées pour la phase solide. En effet, les deux précédentes figures (5.31 et 5.30) s'accordent à confirmer la bonne représentation numérique de la largeur du bain à l'instant final. Cependant, sur la figure 5.29, les températures simulées en surface sont supérieures aux mesures. De la même manière, les températures simulées et mesurées de la zone 3 sont semblables alors que la profondeur de pénétration expérimentale est bien plus importante que celle obtenue numériquement.

### 5.3.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons comparé trois types de résultats issus de la simulation multiphysique avec les données expérimentales. De manière générale, il en ressort une assez bonne représentativité pour les temps finaux, mais une sous-estimation durant les premiers instants. Il semble que ces écarts proviennent des erreurs de modélisation dues à la représentation stationnaire de phénomènes fortement transitoires. Rappelons que nous avons observé, dans le chapitre 2, un rendement plus important aux premiers instants qu'à la fin du soudage. En effet, compte tenu de la méthode d'amorçage de l'arc (contact - retrait), qui implique la remontée de l'électrode au cours du temps, et de l'établissement du plasma, l'apport d'énergie ne peut donc pas être stationnaire.

Au regard des erreurs entre simulation et expérimentation, l'aspect transitoire de l'apport d'énergie semble prépondérant et pourrait être traité par l'utilisation de distributions Gaussiennes à écart-type variable au cours du temps. Précisons cependant, que numériquement cela devient très compliqué à résoudre étant donné que plus le rayon de la distribution diminue (à  $t = 0 \rightarrow r_{th} = 0$ ), plus son amplitude augmente. Le flux de chaleur apporté est alors trop concentré pour une discrétisation spatiale même très fine.

## 5.4 Bilan sur les deux méthodes

Pour conclure sur les avantages et inconvénients de ces deux méthodes de représentation numérique du procédé de soudage TIG, les figures 5.32, 5.33 et 5.34 présentent les évolutions des températures mesurées, simulées de façon multiphysique ou obtenues avec la méthode de simulation simplifiée (problème inverse). Finalement, sont représentées les positions des fronts au cours du temps (figure 5.35) pour les deux méthodes.

Sur les figures suivantes, les courbes en traits interrompus sont les valeurs mesurées, celles en traits pleins résultent du problème inverse et celles composées de croix sont issues de la résolution multiphysique.

Sur les deux figures (5.32 et 5.33), les écarts entre les différentes courbes se comportent de la même manière. Les observations issues de l'étude inverse sont généralement les plus proches de la mesure et l'erreur commise est relativement stable en fonction du temps. Il s'agit dans ce cas des résidus de l'estimation. En revanche, les températures issues de la simulation multiphysique sont globalement sous-estimées durant la phase fortement transitoire ( $t < 10s$ ) mais finissent, à l'issue

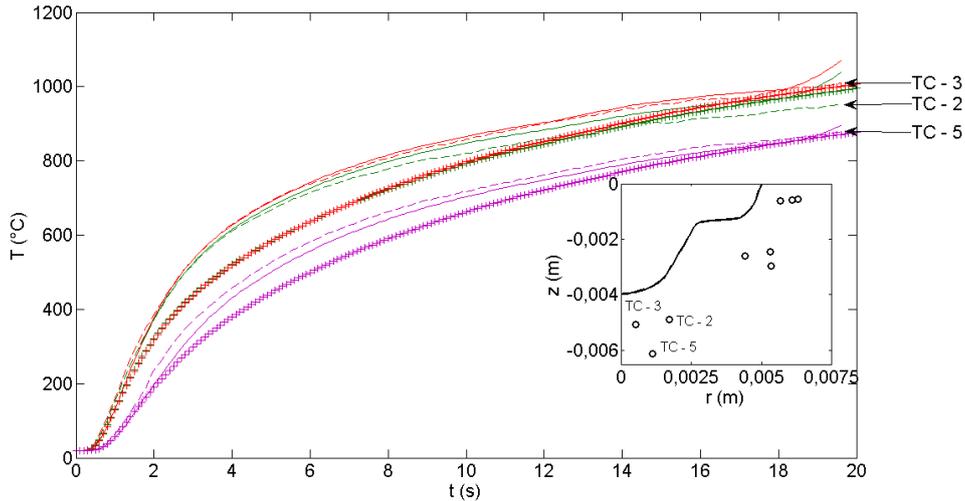


Figure 5.32 – Comparaison finale des températures mesurées (traits interrompus), simulées (croix) et estimées (traits pleins) - zone 3

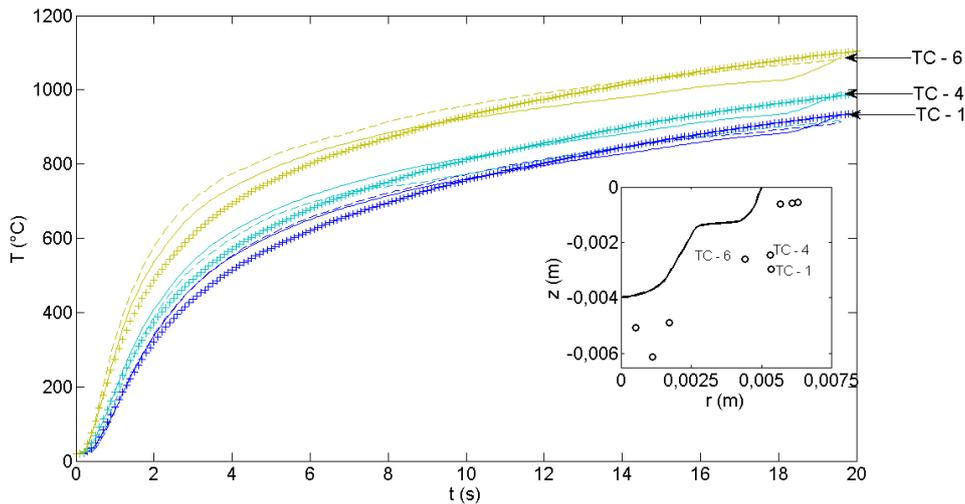


Figure 5.33 – Comparaison finale des températures mesurées (traits interrompus), simulées (croix) et estimées (traits pleins) - zone 2

des 20 s d'essais, par devenir représentatives de la réalité. Cette observation justifie l'utilisation de cette méthode de modélisation pour les études stationnaires et indiquent que la variation de l'apport d'énergie en fonction du temps doit être traitée.

Précisons que les écarts observés pour le thermocouple "TC-4" sur la figure 5.33 ne sont pas représentatifs de cette tendance. En effet, les températures acquises par les trois différentes méthodes sont cohérentes jusqu'à 8 s mais, ensuite, les valeurs mesurées présentent une stabilisation non représentée par les deux modélisations. L'hypothèse la plus probable est un déséquilibre du bain après un temps de 8 s. Il s'agit du moment pour lequel les dimensions de la zone fondue commence à se stabiliser en surface et à augmenter en profondeur. Cette transition crée un déséquilibre dans les écoulements et donc une perturbation de la forme de la cellule en périphérie, qui, initialement sous-dimensionnée numériquement devient surdimensionnée à 9 et 20 s (figure

5.31).

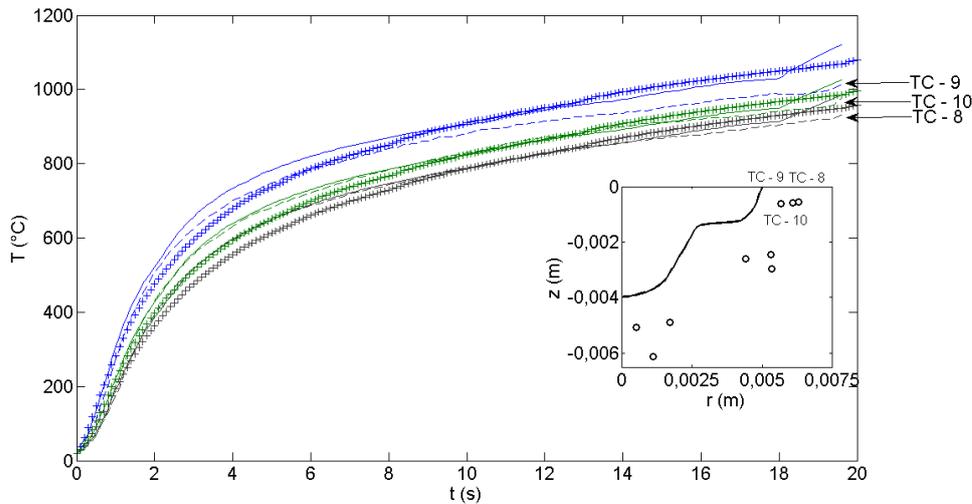


Figure 5.34 – Comparaison finale des températures mesurées (traits interrompus), simulées (croix) et estimées (traits pleins) - zone 1

Sur la figure 5.34 représentant les évolutions de température en surface de la pièce, les deux mesures les plus éloignées de la source (TC-10 et TC-8) présentent des comportements similaires à ceux présentés précédemment, i.e. une bonne adéquation pour les valeurs issues du problème inverse et une sous-évaluation pour le cas multiphysique. Par contre, pour le TC-9, les températures issues des modélisations sont toutes deux éloignées de la réalité. Les températures provenant de la simulation simplifiée (problème inverse) sont supérieures à la mesure durant l'ensemble de l'intervalle de temps, contrairement à la tendance observée sur les autres points. Celles extraites de la simulation multiphysique sont aussi très rapidement supérieures aux valeurs mesurées. Dans ces deux cas, les écarts observés évoluent différemment de ceux observés sur les autres points de mesure. Ce point (TC-9) est le plus proche de l'apport surfacique d'énergie, ce qui remet sa définition en cause pour le problème multiphysique et même son utilisation pour le cas simplifié.

Les précédentes remarques réalisées au regard des évolutions de température peuvent aussi être obtenues en observant les évolutions des fronts de fusion au cours du temps. La figure 5.35 est une comparaison de ces évolutions obtenues après la résolution des problèmes inverse et multiphysique.

Dans les deux cas, les dimensions de la zone fondue en surface sont bien représentées. Rappelons cependant que c'est une donnée du problème inverse (mesure par caméra) et que cette remarque ne valide que l'étude multiphysique. Dans la profondeur de la pièce (zone - 3), les causes des écarts de températures s'observent clairement sur les évolutions des fronts. En effet, durant les 20 s d'essai mais plus particulièrement pour les premiers instants, la profondeur de pénétration obtenue par la simulation multiphysique est bien plus faible que celle obtenue par résolution du problème inverse. Cette dernière remarque sur les positions du front, remet donc en cause l'apport d'énergie (sa distribution spatiale) aux premiers instants ainsi que sa redistribution dans la phase liquide (forces volumiques).

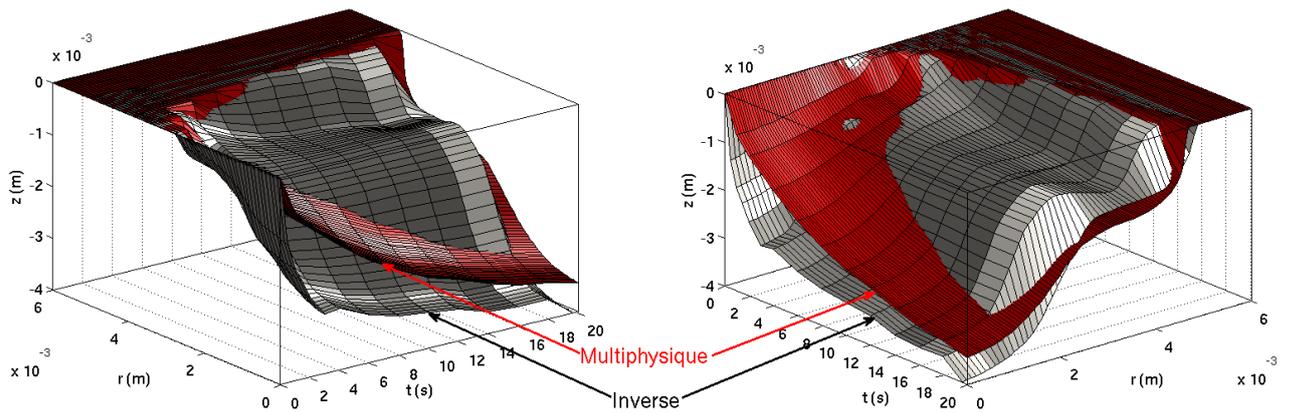


Figure 5.35 – Comparaison des évolutions de front obtenue à partir de la simulation multiphysique et résultant du problème inverse

## 5.5 Conclusion du chapitre 5

Ces études, à la fois inverse et multiphysique, présentent toutes deux des résultats satisfaisants tout en pouvant être améliorées.

Les deux campagnes d'essais ont permis de collecter un nombre important d'informations concernant les évolutions temporelles des températures dans le solide, les évolutions temporelles de la limite de la zone fondue en surface des échantillons et les positions finales des zones fondues. Le travail a donc, à l'issue des expériences, consisté à définir le ou les expériences les plus en adéquation avec les hypothèses formulées dans les études théoriques. En particulier, la première série de mesures, bien que très riche en information, a été écartée de l'exploitation en raison d'une non axisymétrie des macrographies. Puis, parmi les cinq tirs de la seconde campagne, une expérience a été privilégiée. Les données ont donc été pré configurées afin de pouvoir les utiliser d'une part à travers les méthodes inverses pour l'identification de l'évolution de l'interface solide - liquide et d'autre part pour l'analyse du modèle multiphysique.

Ainsi, après configuration des données, une inversion de celles-ci a été réalisée. La convergence vers une solution restant plutôt difficile, une analyse de cinq types d'erreur a été engagée. Ces erreurs portent sur la définition du modèle, la paramétrisation de l'interface, le bruit de mesure, l'algorithme inverse et les erreurs systématiques qu'engendre l'implantation des capteurs de température. Les problèmes étant soulignés, l'accent a été plus particulièrement mis sur l'aspect intrusif des capteurs et sur quelques problèmes dus à la méthode inverse. Ainsi, le développement d'un modèle d'erreur concernant l'implantation des capteurs a permis de quantifier les erreurs maximales. De plus, en lien avec le problème lié à la variable adjointe au temps final, une solution a été mise en application.

A l'issue, les résultats de l'inversion expérimentale permettent une meilleure visualisation de l'évolution temporelle de l'interface liquide - solide dans la profondeur de la pièce à souder. Il est intéressant de souligner que, dans les premiers instants ( $t < 3 s$ ), la profondeur de pénétration de la zone fondue est plus importante que ce que le modèle théorique avait supposée et que le développement du rouleau n'est venu qu'après ces premiers instants.

Ce travail d'estimation reste, compte tenu de l'analyse des erreurs, cependant perfectible. Ainsi, quelques modifications et améliorations peuvent encore être effectuées à travers :

- Une redéfinition de la paramétrisation avec l'ajout de points de contrôle.
- Un retraitement de la définition de l'erreur due au caractère intrusif des thermocouples pour l'identification de l'évolution de l'interface. Un problème direct intégrant directement ces aspects intrusifs pourrait être envisagé.
- Une résolution du problème inverse avec les précédentes corrections apportées dès les premières itérations (et non a posteriori).
- Une redéfinition de la température de l'interface liquide-solide en sacrifiant par exemple des thermocouples.

Concernant le modèle mutiphysique, une simulation impliquant les résolutions couplées de l'équation de la chaleur, de la mécanique des fluides et de l'électromagnétisme, a été développée. De plus, la déformation de la surface libre du liquide a été considérée, son déplacement étant géré par la méthode ALE. Les résultats des résolutions multiphysiques en terme de forme de zone fondue et de températures sont validés pour les instants finaux. En revanche, quelques modifications doivent être apportées pour la phase transitoire, notamment sur la définition de l'apport d'énergie (amplitude et distribution). Pour ce faire, les informations acquises sur les évolutions du front estimées ou l'analyse des écarts entre les températures simulées et mesurées peuvent être utilisées.

Une dernière comparaison des deux approches vient conforter les conclusions déjà soulignées. Les thermogrammes issus de la simulation inverse ont une meilleure adéquation avec les thermogrammes expérimentaux et conduisent à une définition de l'interface liquide-solide plus pénétrante sur les premiers instants. Des difficultés restent cependant, d'une part, dans la définition de la température associée à l'interface et d'autre part, dans la définition de la forme estimée et donc sur les évolutions des thermogrammes aux instants finaux.

# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

L'objectif de cette thèse était de mettre en place une modélisation du procédé de soudage TIG afin de déterminer les champs de température et formes de bain au sein d'un acier inoxydable AISI 316L. La méthodologie adoptée au cours de ce travail s'est voulue principalement adaptable à l'étude de la création du cordon et la fin du cordon de soudure. Ces aspects sont rarement analysés par les modèles existants bien que les problèmes de recouvrement de cordon restent une problématique actuelle des industriels. Deux approches numériques ont donc été proposées. La première approche a consisté à développer un modèle multiphysique limité aux phénomènes au sein des deux phases liquide et solide de l'anode. La deuxième s'est orientée vers la détermination uniquement des températures dans la zone solide et de l'évolution de la position du front de fusion à l'aide de méthodes inverses. Dans les deux cas, le procédé est appliqué de façon statique afin d'analyser uniquement l'aspect transitoire de la création du bain fondu dans un contexte bidimensionnel axisymétrique. Pour ces deux approches, il a été nécessaire de recourir à une instrumentation pour permettre la validation des résultats ou la résolution du problème inverse.

Comme l'a montré l'étude bibliographique, les deux approches multiphysique et inverse comportent toutes deux des avantages et des inconvénients. Concernant l'approche multiphysique, les modèles ne peuvent être prédictifs qu'à condition d'être suffisamment complets, ce qui implique de modéliser également les différents couplages au sein de l'arc et de l'anode. Actuellement, les phénomènes physiques au sein de l'arc sont encore mal maîtrisés. De ce fait, les modèles existants d'arc sont encore limités à une approche bidimensionnelle axisymétrique et associée le plus souvent à un régime stationnaire et un couplage limité avec l'anode. La déformation de la surface du bain n'est généralement pas prise en compte ou seulement à travers un couplage faible, comme dans le cas de la thèse de A. Traidia [113]. Ce constat nous a conduit à nous orienter vers un modèle multiphysique limité uniquement à l'anode, pour laquelle les phénomènes physiques sont mieux appréhendés. Concernant l'approche inverse, l'étude bibliographique a présenté les deux orientations possibles pour décrire les champs de température dans la phase solide au cours du soudage. L'une consiste à identifier les paramètres d'une source équivalente, l'autre repose sur l'identification de la position d'un front de fusion. Cette dernière approche a l'avantage de pouvoir faire abstraction de la phase liquide et évite ainsi les erreurs sur les gradients thermiques induites par la simplification des phénomènes physiques faite pour la phase liquide. La faisabilité de cette approche a été démontrée dans le cadre de la thèse de D. D. Doan [31], qui utilise la transformation de "Duvaut" pour traiter la présence de la frontière mobile. Cette technique numérique reste,

cependant, très difficile à mettre en œuvre à partir de logiciel commercial. Une autre méthode, plus prometteuse pour appréhender le déplacement du front de fusion, réside dans la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian). Cette méthode permet une description précise des interfaces, à condition que les changements topologiques soient modérés, ce qui est le cas pour les évolutions de front de fusion en soudage. Elle a également l'avantage d'être, à présent, intégrée dans de nombreux codes de calcul, comme le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> choisi dans le cadre de cette thèse. Elle n'a cependant pas encore été très utilisée en association avec des méthodes inverses pour l'identification de la position de front de fusion. Ces différents constats ont motivé les choix retenus pour notre approche inverse. Enfin, l'analyse bibliographique a également montré que ces différentes approches (multiphysique ou inverse) nécessitent de disposer de données expérimentales fiables afin d'assurer la pertinence des résultats obtenus. Ceci nous a conduit à développer en parallèle une étape d'instrumentation avec un souci de limiter les différentes sources d'incertitude de mesures. Dans le cadre du soudage, les comparaisons entre températures calculées et températures mesurées restent encore limitées. De plus, bien souvent, les mesures par thermocouples sont rarement décrites, ne permettant pas de juger de la fiabilité des résultats.

A partir de l'étude bibliographique, une description mathématique du modèle multiphysique d'anode a pu être établie et fait l'objet du chapitre 2. Les équations de conservation de la quantité de mouvement, de la masse, de l'énergie ainsi que les équations électromagnétiques sont utilisées pour décrire l'ensemble des phénomènes physiques au sein de l'anode. Ce modèle prend en compte les forces liées à l'effet Marangoni, les forces de Lorentz, les forces de flottabilité ainsi que la déformation de la surface du bain sous l'effet de la pression d'arc. Un soin particulier a été apporté dans le choix de certains paramètres, tels que :

- les propriétés thermophysiques, qui ont fait l'objet d'une synthèse bibliographique complète,
- la discrétisation spatiale du maillage qui doit être particulièrement bien choisie en raison des forts gradients de température et de vitesse rencontrés dans la phase liquide,
- le choix des paramètres décrivant les distributions gaussiennes d'énergie, de densité de courant et de pression d'arc, ainsi que le rendement. Ces paramètres, supposés constants, ont été estimés à partir de données issues de la littérature et permettant de se rapprocher au mieux des conditions opératoires de notre étude expérimentale.

Ce modèle multiphysique a été validé par comparaison avec des résultats, issus d'un modèle similaire, disponibles dans la littérature. Un accord satisfaisant a été obtenu, compte tenu des différences possibles entre les paramètres numériques utilisés dans chacun des modèles.

La précision de ce type de modèle repose également sur le choix des paramètres décrivant les distributions gaussiennes ou ceux gouvernant l'effet Marangoni, à savoir l'évolution de la tension superficielle avec la température, qui reste encore difficilement mesurable. Ce constat nous a conduit à mener un plan d'expériences numériques afin d'étudier l'influence de quatre paramètres : les deux rayons des distributions d'énergie et de courant, le rendement ainsi que le taux de soufre. Il a ainsi été montré que les incertitudes sur le rendement et le taux de soufre

peuvent entraîner d'importantes erreurs sur les dimensions du bain de fusion. En revanche, les rayons des sources thermique et électromagnétique ont un impact modéré sur la forme du bain. De plus, les interactions entre ces différents paramètres sont apparues relativement faibles. Ce plan d'expérience a également permis d'identifier les paramètres permettant de reproduire au mieux la forme expérimentale du bain observée au bout de 3 s d'application de l'arc. Des valeurs cohérentes avec les données disponibles ont été obtenues pour les rayons et le taux de soufre. Par contre, pour le rendement, une valeur de 90% semble nécessaire pour reproduire la bonne forme de bain alors que les rendements habituellement observés pour le soudage TIG sont plutôt de l'ordre de 70 à 80%. Il est, cependant, probable que le rendement (voire les rayons des distributions) soit un paramètre dépendant du temps notamment pour les temps très courts, d'autant plus que la phase d'amorçage de l'arc n'est pas modélisée. Pour finir, ce chapitre se termine par une analyse de l'influence de différents phénomènes, tels que la déformation de la surface du bain, les forces de Lorentz, ainsi que les forces liées à l'effet Marangoni. Il a été montré que ces dernières constituent un paramètre clef pilotant la forme du bain fondu. La difficulté réside alors dans la connaissance précise de l'évolution de la tension superficielle en fonction de la température, évolution rarement disponible dans la littérature car difficile à mesurer à très hautes températures. Ces diverses difficultés nous ont conduit à développer une seconde approche, qui fait abstraction des phénomènes au sein du bain liquide.

Le chapitre 3 présente cette seconde approche qui consiste à ne traiter que les transferts conductifs dans la phase solide. Le domaine représenté est donc limité par le front de fusion qui évolue spatialement au cours du temps. En imposant la température de fusion sur cette frontière mobile, les gradients de température dans la phase solide peuvent ainsi être calculés. La difficulté réside, cependant, dans le déplacement du front de fusion, puisqu'il n'est pas connu a priori. La résolution d'un problème inverse a donc été effectuée. Le suivi de la frontière mobile est assuré à l'aide de la méthode ALE, implémentée dans le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup>, qui permet d'actualiser au cours du temps la géométrie du domaine solide. La méthodologie inverse utilisée pour l'estimation des positions du front est basée sur la méthode de régularisation itérative qui implique la définition d'un problème direct, d'un problème en sensibilité, d'un problème adjoint et d'une fonction "objectif" construite sur des écarts quadratiques entre températures mesurées et températures calculées. L'originalité, dans le problème de sensibilité, a consisté à créer une sollicitation, non pas par une variation de position de l'interface mais par une variation de la température de l'interface, évitant ainsi des problèmes numériques liés au maillage. Les données nécessaires à ce problème inverse sont l'évolution de la température en certains points, ainsi que l'évolution de la largeur de bain en surface et la forme finale de la zone fondue. La connaissance de la largeur du bain en surface permet de réduire l'influence de l'erreur de modélisation. Elle est, par ailleurs, assez facilement accessible grâce à une caméra rapide placée au dessus du bain pendant le soudage. La forme finale de la zone fondue est, quant à elle, nécessaire à l'utilisation du problème adjoint, qui, résolu à rebours, contraint la solution au temps final. Elle peut être obtenue à l'aide d'une analyse macrographique. L'ensemble des formulations mathématiques développées au cours de cette approche inverse a fait l'objet d'une description très détaillée au cours de ce chapitre. Plusieurs algorithmes ont été testés en utilisant des données

issues du modèle multiphysique, plutôt que de mesures réelles. Il a été montré que la méthode de la plus forte pente était à privilégier. Cette conclusion a également été confirmée dans une configuration proche de l'expérience obtenue après l'ajout d'une perturbation des températures de référence pour simuler un bruit virtuel. Cette résolution théorique a permis, par ailleurs, de souligner certaines difficultés liées à la résolution de ce problème inverse, comme le choix du degré d'interpolation ou celui des tolérances de convergence. De plus, il a été montré que les champs de température calculés dans la phase solide par le modèle simplifié (ne prenant en compte que le domaine solide) étaient bien équivalents à ceux obtenus par le modèle multiphysique complet, ce qui justifie ce type d'approche.

Le chapitre 4 présente l'étude expérimentale qui a pour objectif de fournir les données nécessaires au problème inverse et à la validation du modèle multiphysique. Deux campagnes d'essais ont été réalisées au laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Nîmes afin de mesurer, au cours du temps, les températures dans la phase solide, les évolutions des largeurs de bain en surface et la forme finale de la zone fondue. La première campagne a permis d'appréhender les diverses difficultés liées aux grandeurs à mesurer et au problème d'axisymétrie. Concernant la mesure des températures, celle-ci est réalisée à l'aide de thermocouples de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre (type K) soudés au fond de perçages afin d'accéder aux températures au plus près de la zone fondue. Le positionnement de chaque capteur a été choisi à partir de l'étude menée au chapitre 3 en respectant la contrainte de ne pas dépasser 1100°C pour ne pas endommager les thermocouples, tout en gardant une sensibilité suffisante pour le problème inverse. Les largeurs de bain en surface ont pu être obtenues à l'aide d'une caméra rapide. Les problèmes de visualisation liés à la présence de l'arc ont été résolus grâce à l'utilisation de filtre adapté et d'une lampe halogène. Les observations macrographiques ont, quant à elles, été améliorées grâce à l'utilisation d'eau régale pour la réalisation de l'attaque chimique. Plusieurs tirs, effectués sur un même échantillon, ont été réalisés pour différentes durées afin, d'une part, de suivre l'évolution des formes de zones fondues et d'autre part, d'enrichir la base de données pour un même jeu de paramètres opératoires. La reproductibilité limitée des essais a, cependant, conduit à n'utiliser que les données issues d'un même tir qui serviront à la fois aux problèmes inverse et multiphysique.

Le chapitre 5 constitue l'étape finale de ce travail de thèse, puisqu'il s'agit d'appliquer les deux modèles présentés aux chapitres 2 et 3 au cas expérimental défini au chapitre 4. Le problème inverse a ainsi été utilisé pour estimer les positions du front de fusion et les champs de température dans la phase solide à partir des données expérimentales issues d'un tir de 20 s. Les premiers résultats issus de la résolution du problème inverse montrent des évolutions cohérentes des positions du front de fusion, au regard, notamment, des résultats du modèle multiphysique. De même, les températures calculées par ce modèle sont globalement en bon accord avec les températures mesurées. Les différentes sources d'erreur sont ensuite discutées, voire évaluées. Ainsi, un modèle tridimensionnel de conduction pure est utilisé pour quantifier l'erreur maximale commise lors de la mesure intrusive de température en fonction de la direction de l'axe de perçage et de la position du thermocouple. Il est ainsi montré que la température mesurée par thermocouple est surestimée par rapport à la valeur réelle (ie non perturbée par la présence du

thermocouple). Cette erreur est la plus importante pour les thermocouples positionnés parallèlement au flux de chaleur. Ce calcul d'erreur a ainsi permis de corriger les données mesurées, ce qui a permis d'améliorer la concordance entre les mesures et les calculs. De même, l'erreur générée par l'algorithme utilisé au cours du problème inverse a également été analysée. Ce chapitre se poursuit par une comparaison des données expérimentales avec les résultats calculés par le modèle multiphysique. Pour cette confrontation, la prise en compte de la déformation de la surface du bain sous l'effet de la pression d'arc a été nécessaire, en raison de la très faible hauteur d'arc. Les comparaisons, en terme de température, largeur de bain et forme finale de la zone fondue, sont globalement satisfaisants. Les écarts les plus grands sont observés principalement pour les premiers instants.

Ces dernières constatations nous amènent à établir les perspectives de ce travail de thèse. Concernant l'approche multiphysique, la précision du modèle pourrait être améliorée grâce à une meilleure connaissance des propriétés thermophysiques, en particulier celles du métal liquide. Ce problème, récurrent dans le domaine de la simulation thermo-hydraulique du soudage, limite fortement le caractère prédictif de ces modèles. Le développement de méthodes de caractérisation adaptées semble être une démarche indispensable afin de limiter les incertitudes liées à l'utilisation de données de la littérature, généralement fortement dépendantes de la composition de l'alliage utilisé. Un effort particulier devra être porté sur la mesure des tensions de surface en fonction de la température, en raison de l'effet Marangoni, un des paramètres clés de ce type de problème. Par ailleurs, nous avons également montré, à travers le plan d'expériences numériques et les confrontations entre mesures et calculs, que la source thermique utilisée pour décrire l'arc devait probablement être dépendante du temps. Des études complémentaires pourraient ainsi être menées pour mieux comprendre ces aspects transitoires induits par l'allumage de l'arc et l'établissement du plasma. L'amélioration des performances de calcul, notamment à l'aide de clusters, pourrait permettre dans le futur d'envisager le recours aux méthodes inverses couplées avec des modèles multiphysiques afin d'accéder à une description plus réaliste des sources surfaciques.

S'agissant de l'approche inverse, et plus particulièrement de la modélisation simplifiée qui s'y rapporte, l'obtention de résultats plus justes serait, ici aussi, grandement favorisé par une meilleure maîtrise des propriétés thermophysiques. En effet, bien que les niveaux de températures restent en dessous de la température de fusion, les incertitudes sur les propriétés du matériau sont directement répercutées sur les résultats de l'estimation. Nous avons également souligné le caractère perturbateur des capteurs de température sur la résolution du problème inverse et orienté nos recherches vers la définition d'un modèle d'erreur. Faute de pouvoir mesurer la température au sein du matériau sans perturber le champ thermique, la résolution d'un problème inverse dans lequel le problème direct tiendrait compte des capteurs, permettrait de s'affranchir de ces erreurs parfois non négligeables. De même, nous avons observé que les mesures de température par thermocouple dans des zones soumises à un courant électrique pouvaient être perturbées. Des études supplémentaires sur les phénomènes générant ces erreurs pourraient permettre de mieux les comprendre et donc de les éviter et donc d'obtenir des informations, nécessaires à la résolution du problème inverse, moins perturbées.



# Annexe A

## Construction du plan d'expériences

### A.1 Résolution des systèmes d'équations

La formulation matricielle (2.55) est utilisée pour la présentation de la résolution des systèmes d'équations.

#### Modèle linéaire

Dans ce cas,  $\mathbf{X}$  est une matrice carrée, dite d'Hadamard, dont une propriété est d'être orthogonale. Cette propriété implique que sa matrice inverse soit égale à sa matrice transposée.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Ce qui amène à la relation suivante :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = n\mathbf{I} \quad (\text{A.1})$$

avec  $n$  le nombre de lignes (ici  $n = 16$ ) et  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

En multipliant 2.55 par la transposée  $\mathbf{X}^T$  de  $\mathbf{X}$ , il est possible d'écrire :

$$\mathbf{X}^T \vec{y} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \vec{a} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{X}^T \vec{y} = n\mathbf{I} \vec{a} \quad (\text{A.3})$$

Donc, le vecteur des inconnues peut être déterminé par le simple produit :

$$\vec{a} = \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \vec{y} \quad (\text{A.4})$$

### Modèle quadratique

Dans ce cas, la matrice  $\mathbf{X}$  est constituée de l'ensemble des éléments du tableau 2.8. Ce n'est plus une matrice carrée orthogonale (25 lignes pour 20 colonnes). La précédente méthode de résolution n'est donc plus valable. Cependant, le vecteur des effets peut être calculé par l'expression A.5 dans laquelle apparaît l'inverse de la matrice  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ . La solution est donc plus complexe à obtenir que dans le cas linéaire où seule la transposée est nécessaire.

$$\vec{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \vec{y} \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Résultats et analyse

L'analyse des résultats se passe en deux temps. Premièrement, la réflexion est portée sur le plan d'expériences en lui-même. La validité des modèles du premier et second degrés est vérifiée et commentée. Deuxièmement, la réflexion est orienté sur les informations qu'apporte le plan d'expériences pour la simulation multiphysique.

### A.2.1 Validation du modèle mathématique

#### Première étape : le modèle linéaire

Pour commencer, les vecteurs contenant les inconnues ( $\vec{a}^*$  et  $\vec{a}^{**}$ ) des modèles mathématiques ( $\vec{y}^*$  et  $\vec{y}^{**}$ ) représentant respectivement la profondeur de pénétration et la largeur du bain, sont présentés. Ces vecteurs permettent de construire les modèles linéaires, du type 2.53 pour  $\vec{y}^*$  et  $\vec{y}^{**}$ . Ensuite, les modèles sont utilisés pour prédire les réponses relatives aux points de mesures définis dans le tableau 2.8. Ces réponses sont nommées  $\vec{y}_{pred}^*$  et  $\vec{y}_{pred}^{**}$  et sont comparées aux résultats "expérimentaux" (ici, issus de la simulation multiphysique).

Pour la profondeur de pénétration :

$$\vec{a}^* = \begin{pmatrix} -1,953 \\ -0,255 \\ 0,367 \\ 0,188 \\ -0,898 \\ 0,075 \\ -0,068 \\ -0,144 \\ -0,023 \\ 0,123 \\ 0,102 \\ 0,005 \\ 0,028 \\ -0,070 \\ 0,025 \\ -0,012 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{pred}^* = \begin{pmatrix} -2,51 \\ -0,82 \\ -2,80 \\ -0,93 \\ -3,69 \\ -1,34 \\ -4,00 \\ -1,58 \\ -1,63 \\ -0,73 \\ -2,50 \\ -0,77 \\ -2,42 \\ -0,99 \\ -3,26 \\ -1,29 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{mes}^* = \begin{pmatrix} -2,51 \\ -0,82 \\ -2,80 \\ -0,93 \\ -3,69 \\ -1,34 \\ -4,00 \\ -1,58 \\ -1,63 \\ -0,73 \\ -2,50 \\ -0,77 \\ -2,42 \\ -0,99 \\ -3,26 \\ -1,29 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \vec{0}$$

Pour la largeur du bain :

$$\vec{a}^{**} = \begin{pmatrix} 3,666 \\ -0,287 \\ -0,031 \\ 0,031 \\ 0,763 \\ 0,024 \\ -0,002 \\ -0,102 \\ -0,013 \\ 0,079 \\ 0,033 \\ 0,007 \\ -0,013 \\ -0,017 \\ 0,007 \\ -0,006 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{pred}^{**} = \begin{pmatrix} 4,14 \\ 2,65 \\ 4,06 \\ 2,64 \\ 4,03 \\ 2,81 \\ 3,93 \\ 2,77 \\ 4,93 \\ 2,89 \\ 4,78 \\ 2,99 \\ 4,87 \\ 3,25 \\ 4,69 \\ 3,22 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{mes}^{**} = \begin{pmatrix} 4,14 \\ 2,65 \\ 4,06 \\ 2,64 \\ 4,03 \\ 2,81 \\ 3,93 \\ 2,77 \\ 4,93 \\ 2,89 \\ 4,78 \\ 2,99 \\ 4,87 \\ 3,25 \\ 4,69 \\ 3,22 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \vec{0}$$

Le modèle linéaire permet d'obtenir des erreurs nulles aux points définis dans le plan d'expériences ( $\vec{e} = \vec{0}$ ). Les modèles sont testés au centre du domaine, soit, pour l'ensemble des facteurs imposés à 0. Les données mesurées sont affichées dans le tableau 2.8 pour l'essai N°17 et les données prédites sont affichées dans les vecteurs  $\vec{a}^*$  et  $\vec{a}^{**}$  (les  $a_0$ ). Les résultats sont affichés dans le tableau A.1.

	mesure (mm)	prédiction (mm)	e	%
Profondeur ( $y_{mes}^*$ )	-1,66	-1,95	0,29	17
Largeur ( $y_{mes}^{**}$ )	3,96	3,67	0,29	7

Tableau A.1 – Définition des facteurs étudiés

Les erreurs obtenues au centre du domaine sont trop importantes. En effet, lors de la définition du domaine d'étude, les facteurs ont été centrés sur les valeurs de la littérature. Donc, un modèle présentant une forte erreur au point centrale n'est pas satisfaisant et amène à considérer le modèle du second degré.

## Deuxième étape : le modèle quadratique

La procédure de validation est la même que pour le modèle du premier degré.

Pour la profondeur de pénétration :

$$\vec{a}^* = \begin{pmatrix} -1,611 \\ -0,251 \\ 0,380 \\ 0,222 \\ -0,917 \\ 0,075 \\ -0,068 \\ -0,144 \\ -0,023 \\ 0,123 \\ 0,102 \\ 0,005 \\ 0,028 \\ -0,070 \\ 0,025 \\ -0,012 \\ -0,063 \\ -0,054 \\ -0,125 \\ -0,097 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{pred}^* = \begin{pmatrix} -2,47 \\ -0,75 \\ -2,84 \\ -0,93 \\ -3,68 \\ -1,29 \\ -4,06 \\ -1,60 \\ -1,60 \\ -0,66 \\ -2,54 \\ -0,77 \\ -2,42 \\ -0,95 \\ -3,33 \\ -1,32 \\ -1,61 \\ -1,99 \\ -1,49 \\ -1,34 \\ -2,10 \\ -1,64 \\ -2,08 \\ -2,72 \\ -0,89 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{mes}^* = \begin{pmatrix} -2,51 \\ -0,82 \\ -2,80 \\ -0,93 \\ -3,69 \\ -1,34 \\ -4,00 \\ -1,58 \\ -1,63 \\ -0,73 \\ -2,50 \\ -0,77 \\ -2,42 \\ -0,99 \\ -3,26 \\ -1,29 \\ -1,66 \\ -1,94 \\ -1,51 \\ -1,23 \\ -2,19 \\ -1,35 \\ -2,35 \\ -2,86 \\ -0,73 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,07 \\ 0,03 \\ 0,00 \\ 0,01 \\ 0,05 \\ 0,06 \\ 0,02 \\ 0,03 \\ 0,07 \\ 0,04 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,04 \\ 0,07 \\ 0,03 \\ 0,05 \\ 0,05 \\ 0,02 \\ 0,11 \\ 0,09 \\ 0,29 \\ 0,27 \\ 0,14 \\ 0,16 \end{pmatrix}$$

Pour la largeur de bain :

$$\vec{a}^{**} = \begin{pmatrix} 3,968 \\ -0,296 \\ -0,035 \\ 0,037 \\ 0,813 \\ 0,024 \\ -0,002 \\ -0,102 \\ -0,013 \\ 0,079 \\ 0,033 \\ 0,007 \\ -0,013 \\ -0,017 \\ 0,007 \\ -0,006 \\ -0,097 \\ -0,039 \\ -0,030 \\ -0,137 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{pred}^{**} = \begin{pmatrix} 4,18 \\ 2,59 \\ 4,09 \\ 2,57 \\ 4,08 \\ 2,76 \\ 3,97 \\ 2,71 \\ 4,99 \\ 2,85 \\ 4,83 \\ 2,94 \\ 4,94 \\ 3,22 \\ 4,75 \\ 3,18 \\ 3,97 \\ 3,48 \\ 4,07 \\ 3,86 \\ 3,93 \\ 3,94 \\ 3,87 \\ 4,51 \\ 2,88 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_{mes}^{**} = \begin{pmatrix} 4,14 \\ 2,65 \\ 4,06 \\ 2,64 \\ 4,03 \\ 2,81 \\ 3,93 \\ 2,77 \\ 4,93 \\ 2,89 \\ 4,78 \\ 2,99 \\ 4,87 \\ 3,25 \\ 4,69 \\ 3,22 \\ 3,96 \\ 3,40 \\ 4,14 \\ 3,82 \\ 3,96 \\ 4 \\ 3,81 \\ 4,91 \\ 2,48 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,06 \\ 0,03 \\ 0,07 \\ 0,05 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,06 \\ 0,06 \\ 0,04 \\ 0,05 \\ 0,05 \\ 0,07 \\ 0,03 \\ 0,06 \\ 0,04 \\ 0,01 \\ 0,07 \\ 0,08 \\ 0,03 \\ 0,04 \\ 0,06 \\ 0,05 \\ 0,40 \\ 0,40 \end{pmatrix}$$

Le modèle du second degré entraîne des erreurs de prédiction non nulles aux points définis dans le plan d'expériences ( $\vec{e} \neq \vec{0}$ ). Dans ce cas aussi, les résultats prédits au centre du domaine sont comparés aux résultats mesurés (tableau A.2).

	mesure (mm)	prédiction (mm)	e	%
Profondeur ( $y_{mes}^*$ )	-1,66	-1,61	0,05	3
Largeur ( $y_{mes}^{**}$ )	3,96	3,97	0,01	0,2

Tableau A.2 – Définition des facteurs étudiés

Ce tableau illustre la bonne représentation du modèle quadratique au centre du domaine d'étude. De plus, en observant les vecteurs des résultats, il est possible de noter que les erreurs maximales sont obtenues pour les huit dernières valeurs. Ces valeurs correspondent aux essais en  $+\alpha$  et  $-\alpha$  situés en dehors du domaine d'étude ( $x_i > +1$  et  $x_i < -1$ ). En revanche, dans le domaine considéré lors de la construction du plan (A.1), les erreurs sont faibles.

Ce modèle du second degré convient donc à nos attentes et ses résultats peuvent être analysés.

### A.2.2 Analyse des effets

Afin d'éclaircir l'analyse, rappelons la signification d'un effet. Par exemple,  $a_i$  représente la variation de la réponse  $y$ , pour une variation du facteur  $x_i$  allant du centre du domaine ( $x_i = 0$ ) jusqu'à son niveau haut ( $x_i = +1$ ). Aussi, avant de juger de l'amplitude de ces effets, il est nécessaire d'analyser la variance de chacun d'eux.

#### Analyse de la variance des effets

L'expression A.6 permet de déterminer la variance des effets en fonction de la variance des résultats mesurés :

$$var(\vec{a}) = diag(\sigma_y^2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}) \quad (\text{A.6})$$





## Annexe B

# Paramètres du modèle et propriétés thermophysiques de l'acier inoxydable 316L

Paramètres de sources	Valeurs	
U	10	V
I	150	A
$P_{arc}^{max}$	900	$N.m^{-2}$
$\eta$	68	%
$r_{th}$	2	mm
$r_{elec}$	1,7	mm
$r_{pres}$	1,7	mm
Propriétés thermophysiques		
$\lambda(T)$	Chap. 2	([90])
$\rho(T)$	Chap. 2	([90])
$\rho_L$	6347	$kg.m^{-3}$
$c_p(T)$	Chap. 2	([90])
$\mu(T)$	Chap. 2	([65])
$L_m$	260000	$J.kg^{-1}$
$\beta$	$1,41.10^{-5}$	$K^{-1}$
Températures caractéristiques		
$T_{sol}$	1385	$^{\circ}C$
$T_{liq}$	1450	$^{\circ}C$
$T(t_0)$	20	$^{\circ}C$
Les échanges		
$\varepsilon$	0,5	
$h_{cv}$	10	$W.m^{-2}.K^{-1}$
Condition de Darcy		
$c_l$	$7,3.10^7$	
$b$	10-5	
Propriétés EM		
$\sigma_{EM}$	$1.10^6$	$S.m^{-1}$
Paramètres loi de Sahoo		
i	Soufre	
$k_l$	$3,18.10^{-3}$	
$\Delta H^o$	$-1,66.10^8$	$J.kg^{-1}.mol^{-1}$
$\Gamma_s$	$1,3.10^{-8}$	$kg.mol.m^{-2}$
$a_i$	0,0045	% <sub>m</sub>
A	$4,3.10^{-4}$	$N.m^{-1}$
$T_{fus}$	1823	K

Tableau B.1 – Récapitulatif des propriétés et paramètres du modèle

## Annexe C

# Formulation du problème inverse

### C.1 Fonctionnelle de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange fait intervenir la notion de fonctionnelle de Lagrange (ou Lagrangien), qui a pour spécificité de regrouper, dans la même expression, la fonctionnelle résiduelle et les différentes contraintes (égalité ou inégalité) pondérées par des multiplicateurs *a priori* inconnus.

Cette démarche conduit à une minimisation sans contrainte.

Pour appliquer l'écriture de la fonctionnelle résiduelle à tout le domaine d'étude, il convient d'utiliser la fonction de Dirac appliquée aux points de mesure (C.1).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} \frac{r_n}{R} \left[ (\theta(r_n, z_n, t; \sigma) - \tilde{Y}_n(t)) \right]^2 dt \\ = \frac{1}{2} \frac{r}{R} \int_0^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ (\theta(r, z, t, \sigma) - \tilde{Y}(t)) \right]^2 \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dt \quad (C.1) \end{aligned}$$

Appliquée à cette étude, la fonctionnelle est présentée par l'équation (C.2) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sigma) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t) - \tilde{Y}(t) \right]^2 \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dz dr dt + \dots \\
\cdots + & \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ou z_0} p(r, z, t) \left( -\rho(\theta) c_p(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) dz dr dt + \dots \\
& \cdots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max(t)}} \gamma(r, t) \theta(r, \sigma, t) dr dt + \dots \\
& \cdots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max(t)}}^R \eta(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} (r, z_0, t) - \frac{S(r)}{T_f - T_0} + h_{tot}(\theta(r, z_0, t) + 1) \right) dr dt + \dots \\
& \cdots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\mu(z, t)} \mu(z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} (R, z, t) + h_{tot}(\theta(R, z, t) + 1) \right) dz dt + \dots \\
& \cdots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \alpha(r, t) \left( -\lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} (r, Z, t) + h_{tot}(\theta(r, Z, t) + 1) \right) dr dt + \dots \\
& \cdots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma} \beta(z, t) \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} (r_0, z, t) dz dt + \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma} \xi(r, z) (\theta(r, z, t_0) + \theta_0) dz dr
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Où  $p(r, z, t)$ ,  $\gamma(r, t)$ ,  $\eta(r, t)$ ,  $\mu(z, t)$ ,  $\alpha(r, t)$ ,  $\beta(z, t)$  et  $\xi(r, z)$  sont les multiplicateurs de Lagrange. En prévision des prochaines étapes de l'écriture de ce problème inverse, les propriétés thermophysiques ( $\rho$ ,  $c_p$  et  $\lambda$ ) sont exprimées en fonction de  $\theta$ .

La condition d'optimalité est obtenue lorsque la variation première de la fonctionnelle s'annule (C.3) :

$$\delta \mathcal{L}(\sigma; \delta \sigma) = 0 \tag{C.3}$$

Avec  $\delta \sigma$ , une variation quelconque de la fonction  $\sigma(r, t)$ .

Afin d'exprimer cette variation de la fonctionnelle de Lagrange, il est nécessaire de présenter les formulations en variation de la fonctionnelle résiduelle ainsi que celle du problème direct (3.17) à (3.23).

## C.2 Problème en variation ou problème de sensibilité

En appliquant, à la fonction  $\sigma(r, t)$  une variation  $\delta \sigma(r, t)$ , la température  $\theta(r, z, t)$  et la fonctionnelle résiduelle  $J(\sigma)$  subissent respectivement les variations  $\delta \theta(r, z, t)$  et  $\delta J(\sigma; \delta \sigma)$ .

### C.2.1 Variation de la fonctionnelle résiduelle

En définissant la variation pour une fonction  $F(x)$  quelconque par l'équation (C.4) :

$$\delta F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{F(x + \varepsilon x) - F(x)}{\varepsilon} \right) \quad (\text{C.4})$$

il est donc obtenu (C.5) pour la fonctionnelle  $J(\sigma)$  :

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = J(\sigma + \delta\sigma) - J(\sigma) \quad (\text{C.5})$$

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = \frac{1}{2} \frac{r}{R} \int_{t_0}^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} \left( \left[ \theta(r, z, t; \sigma) + \delta\theta - \tilde{Y}(t) \right]^2 - \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right]^2 \right) \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dt \quad (\text{C.6})$$

$$\delta J(\sigma; \delta\sigma) = \frac{r}{R} \int_{t_0}^{t_{fin}} \sum_{n=1}^{Nc} \left( \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right] \delta\theta(r, z, t) \right) \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) dt \quad (\text{C.7})$$

Il est à noter que le  $\delta\theta$ , qui apparaît dans l'équation (C.7), est la forme adimensionnalisée du  $\delta T$  de la relation (3.29).

## C.2.2 Écriture de l'équation de la chaleur en variation

Le problème direct en variation est construit de la même façon, en appliquant une variation à chaque terme dans l'équation de la chaleur (3.17).

Soit,

### 1. Pour le terme temporel

En appliquant la variation et en posant :  $\rho(\theta)c_p(\theta) = C(\theta)$ , le terme temporel de l'équation de la chaleur devient :

$$\delta \left[ C(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} \right] = C(\theta + \delta\theta) \frac{\partial(\theta + \delta\theta)}{\partial t} - C(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (\text{C.8})$$

En considérant le développement limité de Taylor d'ordre un de  $C(\theta + \delta\theta)$ ,

$$C(\theta + \delta\theta) = C(\theta) + \frac{dC}{d\theta} \delta\theta$$

L'expression (C.8) peut être réécrite,

$$\delta[... ] = \left( C(\theta) + \frac{dC}{d\theta} \delta\theta \right) \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\delta\theta}{\partial t} \right) - C(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (\text{C.9})$$

$$\delta[... ] = C(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} + C(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial t} + \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t} \delta\theta + \underbrace{\frac{dC}{d\theta} \frac{\partial\delta\theta}{\partial t} \delta\theta}_{O(\delta\theta^2)} - C(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (\text{C.10})$$

$$\delta \left[ C(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] = C(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} + \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta = \frac{\partial (C(\theta) \delta \theta)}{\partial t} \quad (\text{C.11})$$

## 2. Pour le terme de conduction radiale

$$\delta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta + \delta \theta) \frac{\partial (\theta + \delta \theta)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (\text{C.12})$$

De la même manière que pour  $C$ , le développement limité de Taylor d'ordre un de  $\lambda(\theta + \delta \theta)$ ,

$$\lambda(\theta + \delta \theta) = \lambda(\theta) + \frac{d\lambda}{d\theta} \delta \theta$$

L'expression (C.12) peut être réécrite,

$$\delta [\dots] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( \lambda(\theta) + \frac{d\lambda}{d\theta} \delta \theta \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} \right) \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (\text{C.13})$$

$$\delta [\dots] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(\theta) r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \lambda(\theta) r \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta} \delta \theta r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta} \delta \theta r \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(\theta) r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (\text{C.14})$$

$$\delta [\dots] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(\theta) r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(\theta) r \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{d\lambda}{d\theta} \delta \theta r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{d\lambda}{d\theta} \delta \theta r \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} \right)}_{O(\delta \theta^2)} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(\theta) r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (\text{C.15})$$

$$\delta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda(\theta) r \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{d\lambda}{d\theta} \delta \theta r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (\text{C.16})$$

En développant et sachant que :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

$$\delta [\dots] = \frac{1}{r} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} + r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} + r \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial r^2} + r \delta \theta \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} + \delta \theta \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + r \delta \theta \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) \quad (\text{C.17})$$

Donc,

$$\delta[\dots] = \frac{1}{r}\lambda(\theta)\frac{\partial\delta\theta}{\partial r} + 2\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{\partial\delta\theta}{\partial r} + \lambda(\theta)\frac{\partial^2\delta\theta}{\partial r^2} + \delta\theta\left[\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right] \quad (\text{C.18})$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\delta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)\right] = \frac{\partial^2(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial r^2} \quad (\text{C.19})$$

### 3. Pour le terme de conduction dans la profondeur

Le développement est identique au précédent :

$$\delta\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta + \delta\theta)\frac{\partial(\theta + \delta\theta)}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad (\text{C.20})$$

$$\delta[\dots] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\lambda(\theta) + \frac{d\lambda}{d\theta}\delta\theta\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad (\text{C.21})$$

$$\delta[\dots] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \lambda(\theta)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z} + \frac{d\lambda}{d\theta}\delta\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{d\lambda}{d\theta}\delta\theta\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad (\text{C.22})$$

$$\delta[\dots] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\delta\theta\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\delta\theta\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right)}_{O(\delta\theta^2)} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad (\text{C.23})$$

$$\delta\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\lambda}{d\theta}\delta\theta\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \quad (\text{C.24})$$

En développant et sachant que :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = \frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

$$\delta[\dots] = \frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z} + \lambda(\theta)\frac{\partial^2\delta\theta}{\partial z^2} + \delta\theta\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z} + \delta\theta\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \quad (\text{C.25})$$

Donc,

$$\delta[\dots] = 2\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z} + \lambda(\theta)\frac{\partial^2\delta\theta}{\partial z^2} + \delta\theta\left[\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \quad (\text{C.26})$$

$$\delta\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial^2(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z^2} \quad (\text{C.27})$$

Donc, l'équation de la chaleur en variation est obtenue en regroupant les expressions ((C.26), (C.18) et (C.11)) pour la formulation "développée" (C.28) utilisée dans l'écriture de la fonctionnelle de Lagrange en variation et ((C.27), (C.19) et (C.11)) pour la formulation "contractée" (C.29) à résoudre dans le cadre du problème en sensibilité.

$$C(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} + 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial r^2} + 2 \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial z^2} + \delta \theta \left[ \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] \quad (\text{C.28})$$

$$\boxed{\frac{\partial(C(\theta)\delta\theta)}{\partial t} = \frac{\partial^2(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z^2}} \quad (\text{C.29})$$

### C.2.3 Écriture des conditions aux limites en variation

Pour définir les conditions aux limites en variation, la même méthode est appliquée aux équations (3.18) à (3.23).

#### 1. sur la frontière $\Gamma_0(t)$ :

Sur cette frontière, une condition de Dirichlet est imposée,  $T_f = 1696K$  en température et  $\theta_f = 0$  en température sans dimension. La condition de variation en température devrait donc être nulle et une variation  $\delta\sigma$  devrait être appliquée sur la géométrie (ALE).

Ce type de condition entraîne des modifications du maillage et donc des incertitudes sur le calcul des températures aux points de mesure (valeurs de  $\delta\theta(r_n, z_n, t; \sigma)$ ) nécessaires à la détermination du pas de descente (3.29).

Une hypothèse particulièrement simplificatrice est de considérer [...], sur  $\Gamma_0(t)$ , une variation de température  $\delta\theta$  plutôt qu'une variation de position  $\delta\sigma$ . Elle est déterminée par un développement limité de Taylor.

Par exemple, pour une fonction quelconque  $f(x)$ .

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots \quad (\text{C.30})$$

$$\text{En posant } \begin{cases} f(x) = \theta(\sigma + \delta\sigma) \\ f(x_0) = \theta(\sigma) \\ x - x_0 = \delta\sigma \end{cases}$$

Et en se limitant au premier ordre, la définition C.30 permet d'écrire (C.32).

$$\theta(\sigma + \delta\sigma) = \theta(\sigma) + \delta\sigma \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (\text{C.31})$$

**Remarque :** Le terme  $f'$  est ici une dérivée de  $\theta$  selon l'axe  $z$  car  $\sigma$  correspond à un déplacement sur  $z$ .

De plus,  $\theta(\sigma + \delta\sigma) - \theta(\sigma) = \delta\theta$ .

$$\boxed{\delta\theta(r, \sigma, t) = \delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z}} \quad (\text{C.32})$$

2. sur la frontière  $\Gamma_1$  :

$$\rightarrow \delta \left[ -\lambda(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right] = -\lambda(\theta + \delta\theta) \frac{\partial(\theta + \delta\theta)}{\partial z} + \lambda(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (\text{C.33})$$

$$= -\lambda(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} - \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} - \delta\theta \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - \underbrace{\delta\theta \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}}_{0(\delta\theta^2)} + \lambda(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (\text{C.34})$$

$$= -\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} - \delta\theta \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (\text{C.35})$$

$$= -\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z} \quad (\text{C.36})$$

$$\rightarrow \delta \left[ -\frac{S(r)}{T_f - T_{inf}} + h_{tot}(\theta + 1) \right] = -\frac{S(r)}{T_f - T_{inf}} + h_{tot}(\theta + \delta\theta + 1) + \frac{S(r)}{T_f - T_{inf}} - h_{tot}(\theta + 1) \quad (\text{C.37})$$

$$= h_{tot}\delta\theta \quad (\text{C.38})$$

Soit,

$$\boxed{-\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z} = h_{tot}\delta\theta} \quad (\text{C.39})$$

3. sur la frontière  $\Gamma_2$  :

$$\boxed{-\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial r} = h_{tot}\delta\theta} \quad (\text{C.40})$$

4. sur la frontière  $\Gamma_3$  :

$$\boxed{\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial z} = h_{tot}\delta\theta} \quad (\text{C.41})$$

5. sur la frontière  $\Gamma_4$  :

La condition d'axisymétrie entraîne (C.42)

$$\boxed{\frac{\partial(\lambda(\theta)\delta\theta)}{\partial r} = 0} \quad (\text{C.42})$$

6. à l'instant  $t = 0$  :

À l'instant initial la température est une constante, donc sa variation est nulle (C.43).

$$\boxed{\delta\theta = 0} \tag{C.43}$$

Il est intéressant de noter que les conditions sur les frontières  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont assimilables à des pertes par convection conditionnées par le coefficient  $h_{tot}$  et par une température ambiante égale à 0.

## C.3 Fonctionnelle de Lagrange en variation

### C.3.0.1 Formulation initiale

Connaissant les éléments du problème direct en variation, la fonctionnelle de Lagrange peut, elle aussi, être écrite en variation en remplaçant les différents termes qui la composent par leurs équivalents en variation (formulation "développée").

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) &= \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right] \delta\theta(r, z, t) \delta(r-r_n) \delta(z-z_n) dz dr dt + \dots \\
&\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} p(r, z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} + r\lambda(\theta) \frac{\partial^2\delta\theta}{\partial r^2} + 2r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} + r\lambda(\theta) \frac{\partial^2\delta\theta}{\partial z^2} + 2r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial\delta\theta}{\partial z} + \dots \right. \\
&\dots + r\delta\theta \left[ \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t} \right] - rC(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial t} \Big) dz dr dt + \dots \\
&\qquad \dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}(t)} \gamma(r, t) \left( \delta\theta(r, \sigma, t) - \delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) dr dt}_{\text{sur } \Gamma_0(t)} + \dots \\
&\dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max}(t)}^R \eta(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, z_0, t) + \delta\theta(r, z_0, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + h_{tot} \delta\theta(r, z_0, t) \right) dr dt}_{\text{sur } \Gamma_1} + \dots \\
&\dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\mu(z, t)} \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(R, z, t) + \delta\theta(R, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} + h_{tot} \delta\theta(R, z, t) \right) dz dt}_{\text{sur } \Gamma_2} + \dots \\
&\dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \alpha(r, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, Z, t) + \delta\theta(r, Z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - h_{tot} \delta\theta(r, Z, t) \right) dr dt}_{\text{sur } \Gamma_3} + \dots \\
&\dots + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma} \beta(z, t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(r_0, z, t) + \delta\theta(r_0, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) dz dt}_{\text{sur } \Gamma_4} + \dots \\
&\qquad \dots + \underbrace{\int_{r_0}^R \int_Z^{\xi(r, z)} \xi(r, z) (\delta\theta(r, z, t_0)) dz dr}_{\text{à } t=t_0}
\end{aligned} \tag{C.44}$$

Pour des raisons de simplification d'écriture, l'équation de la chaleur en variation, introduite dans la fonctionnelle de Lagrange, est multipliée par un facteur  $r$ . Cela n'a aucune influence sur la validité de la suite du développement, car rappelons que les contraintes introduites dans un Lagrangien sont imposées égales à zéro.

La condition d'optimalité étant obtenue pour  $\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = 0$ , il est nécessaire d'annuler les termes factorisés par  $\delta\theta$ . Or, dans l'équation (C.73), des dérivées de la variation de température subsistent. Des intégrations par parties sont appliquées à ces termes afin de réduire l'ordre de dérivation.

### C.3.1 Réduction de l'ordre des dérivées de $\delta\theta$

En ne considérant que la portion de la fonctionnelle de Lagrange (deuxième et troisième lignes de (C.45)) dans laquelle interviennent les termes à reformuler et en distribuant le multiplicateur

de Lagrange  $p(r, z, t)$ , les intégrations par parties peuvent être identifiées ( $IPP_1$ ,  $IPP_2$ ,  $IPP_3$ ,  $IPP_4$ ,  $IPP_5$  et  $IPP_6$ ).

**Remarque** : Dans l'expression (C.73) les éléments issus de l'équation de la chaleur en variation sont intégrés sur les trois dimensions ( $r$ ,  $z$  et  $t$ ). Pour des raisons de clarté, lors du développement des IPP, un seul symbole intégrale est présenté, cependant, les deux autres subsistent.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = & \dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)_{ou}z_0} \left( \boxed{IPP_1} + \boxed{IPP_2} + \boxed{IPP_3} + \dots \right. \\
& \dots + \boxed{IPP_4} + \boxed{IPP_5} + pr\delta\theta \left[ \dots + \dots + \dots \right] - \boxed{IPP_6} \left. \right) dzdrdt + \dots
\end{aligned} \tag{C.45}$$

$IPP_1$  :

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^R p\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} dr &= \left[ p\lambda(\theta)\delta\theta \right]_{r_0}^R - \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) \delta\theta dr - \int_{r_0}^R p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta dr \\
&= \left[ p\lambda(\theta)\delta\theta \right]_{r_0}^R - \int_{r_0}^R \left( \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) \delta\theta + \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta \right) dr \tag{C.46}
\end{aligned}$$

$IPP_2$  :

$$\int_{r_0}^R pr\lambda(\theta) \frac{\partial^2\delta\theta}{\partial r^2} dr = \left[ pr\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} \right]_{r_0}^R - \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} r\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} dr - \int_{r_0}^R p \frac{\partial r}{\partial r} \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} dr - \int_{r_0}^R pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} dr \tag{C.47}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ pr\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} \right]_{r_0}^R - \left( \left[ \frac{\partial p}{\partial r} r \lambda(\theta) \delta \theta \right]_{r_0}^R - \int_{r_0}^R \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) \delta \theta dr - \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \lambda(\theta) \delta \theta dr - \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta dr \right) \\
&\quad - \left( \left[ p \lambda(\theta) \delta \theta \right]_{r_0}^R - \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) \delta \theta dr - \int_{r_0}^R p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta dr \right) - \left( \left[ pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta \right]_{r_0}^R \right. \\
&\quad \left. - \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta dr - \int_{r_0}^R p \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta dr - \int_{r_0}^R pr \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 \delta \theta dr - \int_{r_0}^R pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \delta \theta dr \right) \quad (C.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ pr\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} r \lambda(\theta) \delta \theta - p \lambda(\theta) \delta \theta - pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta \right]_{r_0}^R + \int_{r_0}^R \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) \delta \theta + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) \delta \theta + 2 \frac{\partial p}{\partial r} r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) \delta \theta + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta + pr \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 \delta \theta + pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \delta \theta \right) dr \quad (C.49)
\end{aligned}$$

*IPP<sub>3</sub>* :

$$\begin{aligned}
2 \int_{r_0}^R pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \delta \theta}{\partial r} dr &= 2 \left[ pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta \right]_{r_0}^R - 2 \int_{r_0}^R \frac{\partial p}{\partial r} r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta dr - 2 \int_{r_0}^R p \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta dr \\
&\quad - 2 \int_{r_0}^R pr \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 \delta \theta dr - 2 \int_{r_0}^R pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \delta \theta dr \quad (C.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[ pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta \right]_{r_0}^R - 2 \int_{r_0}^R \left( \frac{\partial p}{\partial r} r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta + pr \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 \delta \theta + pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \delta \theta \right) dr \quad (C.51)
\end{aligned}$$

*IPP<sub>4</sub>* :

$$r \int_Z^{z_0} p \lambda(\theta) \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial z^2} dz = r \left[ p \lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} \right]_Z^{z_0} - r \int_Z^{z_0} \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} dz - r \int_Z^{z_0} p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} dz \quad (C.52)$$

$$\begin{aligned}
&= r \left[ p\lambda(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} \right]_Z^{z_0} - r \left( \left[ \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta \right]_Z^{z_0} - \int_Z^{z_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) \delta\theta dz - \int_Z^{z_0} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta dz \right) - r \left( \left[ p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta \right]_Z^{z_0} \right. \\
&\quad \left. - \int_Z^{z_0} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta dz - \int_Z^{z_0} p \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \delta\theta dz - \int_Z^{z_0} p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \delta\theta dz \right) \quad (\text{C.53})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r \left[ p\lambda(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta - p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta \right]_Z^{z_0} + r \int_Z^{z_0} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) \delta\theta + 2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta \right. \\
&\quad \left. + p \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \delta\theta + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \delta\theta \right) dz \quad (\text{C.54})
\end{aligned}$$

*IPP<sub>5</sub>* :

$$\begin{aligned}
2r \int_Z^{z_0} p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \delta\theta}{\partial z} dz &= 2r \left[ p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta \right]_Z^{z_0} - 2r \int_Z^{z_0} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta dz \\
&\quad - 2r \int_Z^{z_0} p \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \delta\theta dz - 2r \int_Z^{z_0} p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \delta\theta dz \quad (\text{C.55})
\end{aligned}$$

$$= 2r \left[ p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta \right]_Z^{z_0} - 2r \int_Z^{z_0} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta\theta + p \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \delta\theta + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \delta\theta \right) dz \quad (\text{C.56})$$

*IPP<sub>6</sub>* :

$$r \int_{t_0}^{t_{fin}} p C(\theta) \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} dt = r \left[ p C(\theta) \delta\theta \right]_{t_0}^{t_{fin}} - r \int_{t_0}^{t_{fin}} \frac{\partial p}{\partial t} C(\theta) \delta\theta dt - r \int_{t_0}^{t_{fin}} p \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta\theta dt \quad (\text{C.57})$$

$$= r \left[ p C(\theta) \delta\theta \right]_{t_0}^{t_{fin}} - r \left( \int_{t_0}^{t_{fin}} C(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} \delta\theta + p \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta\theta \right) dt \quad (\text{C.58})$$

Les relations (C.46), (C.49), (C.51), (C.54), (C.56) et (C.58) font intervenir, deux éléments. Premièrement, des termes localisés sur les conditions aux limites à ajouter aux parties correspondantes dans la fonctionnelle de Lagrange (C.73). Deuxièmement, des termes intégrés sur tout le domaine à factoriser par  $\delta\theta$ .

La portion de fonctionnelle (C.45) est reformulée en remplaçant les termes encadrés par les intégrales restant après les intégrations par parties (C.59).

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = & \dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \left( \left[ \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta)}_1 - \underbrace{p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r}}_2 \right] + \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta)}_3 + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta)}_1 + \underbrace{2 \frac{\partial p}{\partial r} r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r}}_4 + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta)}_1 \right. \right. \\
& + \underbrace{p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r}}_2 + \underbrace{p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r}}_2 + \underbrace{pr \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2}_5 + \underbrace{pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}}_6 \left. \right] + \left[ \underbrace{-2r \frac{\partial p}{\partial r} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r}}_4 - \underbrace{2p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r}}_2 - \underbrace{2pr \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2}_5 \right. \\
& \left. \left. - \underbrace{2pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}}_6 \right] + \left[ \underbrace{r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) \delta\theta}_7 + \underbrace{2r \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z}}_8 + \underbrace{pr \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2}_9 + \underbrace{pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}}_{10} \right] + \left[ \underbrace{-2r \frac{\partial p}{\partial z} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z}}_8 \right. \\
& \left. - \underbrace{2rp \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2}_9 - \underbrace{2rp \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}}_{10} \right] + \left[ \underbrace{rC(\theta) \frac{\partial p}{\partial t}}_{11} + \underbrace{pr \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t}}_{12} \right] + \left[ \underbrace{rp \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial r} \right)^2}_5 + \underbrace{p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r}}_2 + \underbrace{rp \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}}_6 \right. \\
& \left. + \underbrace{rp \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} \left( \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2}_9 + \underbrace{rp \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}}_{10} - \underbrace{rp \frac{dC}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial t}}_{12} \right] \delta\theta dz dr dt + \dots \quad (\text{C.59})
\end{aligned}$$

Donc, après les simplifications présentées sur (C.59), il reste (C.60).

$$\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = \dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) + r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) \delta\theta + rC(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} \right) \delta\theta dz dr dt + \dots \quad (\text{C.60})$$

### C.3.2 Complément des conditions aux limites

Dans cette partie, les éléments de la fonctionnelle de Lagrange correspondant aux conditions aux limites sont complétées par les résultats obtenus après IPP.

Cependant, avant de pouvoir présenter la fonctionnelle  $\delta$ , un léger développement est nécessaire. Rappelons, sous leurs formes complètes, les parties qu'il reste à traiter :

$$IPP_1 \rightarrow \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \left[ p \lambda(\theta) \delta\theta \right]_{r_0}^R dz dt \quad (\text{C.61})$$

$$IPP_2 \rightarrow \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \left[ pr \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} r \lambda(\theta) \delta\theta - p \lambda(\theta) \delta\theta - pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta \right]_{r_0}^R dz dt \quad (\text{C.62})$$

$$IPP_3 \rightarrow 2 \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r,t)ouzo} \left[ pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta \right]_{r_0}^R dz dt \quad (\text{C.63})$$

$$IPP_4 \rightarrow \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R r \left[ p\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta \theta - p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta \right]_Z^{z_0} dr dt \quad (C.64)$$

$$IPP_5 \rightarrow 2 \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R r \left[ p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta \right]_Z^{z_0} dr dt \quad (C.65)$$

$$IPP_6 \rightarrow \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouz_0} r \left[ pC(\theta) \delta \theta \right]_{t_0}^{t_{fin}} dz dr \quad (C.66)$$

Soit,

$$IPP_1 \rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{z_0} p\lambda(\theta) \delta \theta(R, z, t) dz dt}_{sur \Gamma_2} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r_0,t)} p\lambda(\theta) \delta \theta(r_0, z, t) dz dt}_{sur \Gamma_4} \quad (C.67)$$

$$IPP_2 \rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{z_0} \left( pr\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial r}(R, z, t) - \frac{\partial p}{\partial r} r\lambda(\theta) \delta \theta(R, z, t) - p\lambda(\theta) \delta \theta(R, z, t) - pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta(R, z, t) \right) dz dt}_{sur \Gamma_2} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r_0,t)} \left( pr\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial r}(r_0, z, t) - \frac{\partial p}{\partial r} r\lambda(\theta) \delta \theta(r_0, z, t) - p\lambda(\theta) \delta \theta(r_0, z, t) - pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta(r_0, z, t) \right) dz dt}_{sur \Gamma_4} \quad (C.68)$$

$$IPP_3 \rightarrow 2 \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{z_0} pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta(R, z, t) dz dt}_{sur \Gamma_2} - 2 \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma(r_0,t)} pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \theta(r_0, z, t) dz dt}_{sur \Gamma_4} \quad (C.69)$$

$$IPP_4 \rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}(t)} r \left( p\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial z}(r, \sigma, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta \theta(r, \sigma, t) - p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta(r, \sigma, t) \right) dr dt}_{sur \Gamma_0(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max}(t)}^R r \left( p\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial z}(r, z_0, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta \theta(r, z_0, t) - p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta(r, z_0, t) \right) dr dt}_{sur \Gamma_1} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R r \left( p\lambda(\theta) \frac{\partial \delta \theta}{\partial z}(r, Z, t) - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta \theta(r, Z, t) - p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta(r, Z, t) \right) dr dt}_{sur \Gamma_3} \quad (C.70)$$

$$IPP_5 \rightarrow 2r \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}(t)} p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta(r, \sigma, t) dr dt}_{sur \Gamma_0(t)} + 2r \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max}(t)}^R p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta(r, z_0, t) dr dt}_{sur \Gamma_1} - 2r \underbrace{\int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta(r, Z, t) dr dt}_{sur \Gamma_3} \quad (C.71)$$

$$IPP_6 \rightarrow \underbrace{\int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouz_0} rpC(\theta)\delta\theta(r,z,t_{fin})dzdr}_{\text{à } t_{fin}} - \underbrace{\int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouz_0} rpC(\theta)\delta\theta(r,z,t_0)dzdr}_{\text{à } t_0} \quad (C.72)$$

### C.3.3 Forme finale de variation de la fonctionnelle de Lagrange

Cette étape finale consiste à assembler les différents éléments de la fonctionnelle de manière à extraire, dans une prochaine partie, les composantes du problème adjoint.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) &= \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouz_0} \frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r,z,t; \sigma) - \tilde{Y}_n(t) \right] \delta\theta(r,z,t) \delta(r-r_n) \delta(z-z_n) dz dr dt + \dots \\ &\dots + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \int_Z^{\sigma(r,t)ouz_0} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) + r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) \delta\theta + rC(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} \right) \delta\theta dz dr dt + \dots \\ &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}(\theta)} \left[ \gamma(r,t) \left( \delta\theta(r,\sigma,t) - \delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + r(p\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r,\sigma,t) - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta(r,\sigma,t) + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \delta\theta(r,\sigma,t)) \right] dr dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_{max}(t)}^R \left[ \eta(r,t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r,z_0,t) + \delta\theta(r,z_0,t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} + h_{tot} \delta\theta(r,z_0,t) \right) + r(p\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r,z_0,t) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta(r,z_0,t) + p \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \delta\theta(r,z_0,t)) \right] dr dt + \dots \\ &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{z_0} \left[ \mu(z,t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(R,z,t) + \delta\theta(R,z,t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} + h_{tot} \delta\theta(R,z,t) \right) + pr\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(R,z,t) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial p}{\partial r} r \lambda(\theta) \delta\theta(R,z,t) + pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta(R,z,t) \right] dz dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^R \alpha(r,t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r,Z,t) + \delta\theta(r,Z,t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - h_{tot} \delta\theta(r,Z,t) \right) - rp\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r,Z,t) + \\ &\quad + r \frac{\partial p}{\partial z} \lambda(\theta) \delta\theta(r,Z,t) - rp \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \delta\theta(r,Z,t) dr dt + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_Z^{\sigma} \beta(z,t) \left( \lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(r_0,z,t) + \delta\theta(r_0,z,t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) - pr\lambda(\theta) \frac{\partial\delta\theta}{\partial r}(r_0,z,t) \\ &\quad + \frac{\partial p}{\partial r} r \lambda(\theta) \delta\theta(r_0,z,t) - pr \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial\theta}{\partial r} \delta\theta(r_0,z,t) dz dt + \\ &+ \int_{r_0}^R \int_Z^{z_0} \left[ \xi(r,z) \delta\theta(r,z,t_0) - rpC(\theta) \delta\theta(r,z,t_0) \right] dz dr + \int_{r_0}^R \int_Z^{z_0} rpC(\theta) \delta\theta(r,z,t_{fin}) dz dr \end{aligned} \quad (C.73)$$

### C.3.4 Dédution du problème adjoint

Afin de satisfaire la condition d'optimalité ( $\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = 0$ ), il faut annuler les différents facteurs de la variation de température  $\delta\theta$ . C'est-à-dire les termes multipliés par  $\delta\theta(r,z,t)$ ,  $\delta\theta(r_0,z,t)$ ,  $\delta\theta(R,z,t)$ ,  $\delta\theta(r,Z,t)$ ,  $\delta\theta(r,z_0,t)$ ,  $\delta\theta(r,\sigma,t)$  ou par leurs dérivées.

– pour  $\delta\theta(r,z,t)$

$$\frac{r}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right] \delta(r-r_n) \delta(z-z_n) + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} r \lambda(\theta) + \frac{\partial p}{\partial r} \lambda(\theta) + r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \lambda(\theta) + r C(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.74})$$

En mettant  $r$  en facteur l'expression précédente peut s'écrire sous une forme plus classique.

$$- C(\theta) \frac{\partial p}{\partial t} = \lambda(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda(\theta) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + S(r, z, t) = 0 \quad (\text{C.75})$$

Avec :

$$S(r, z, t) = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{Nc} \left[ \theta(r, z, t; \sigma) - \tilde{Y}(t) \right] \delta(r - r_n) \delta(z - z_n) \quad (\text{C.76})$$

une somme de sources localisées aux différents points de mesure. Notons que la précédente multiplication de la fonction objectif (??) par  $\frac{r_n}{R}$  permet d'éviter d'avoir  $r$  au dénominateur de la source (C.76). En effet, dans le cas contraire, aucun point de mesure ne peut être positionné sur l'axe de symétrie  $r = 0$ .

– pour  $\delta\theta(r, \sigma, t)$  et  $\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}(r, \sigma, t)$  sur  $\Gamma_0$

$$rp(r, \sigma, t)\lambda(\theta) = 0 \rightarrow \boxed{p(r, \sigma, t) = 0} \quad (\text{C.77})$$

$$\gamma(r, t) - r \frac{\partial p}{\partial z}(r, \sigma, t)\lambda(\theta) + p(r, \sigma, t)r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \rightarrow \gamma(r, t) = r \frac{\partial p}{\partial z}(r, \sigma, t)\lambda(\theta) \quad (\text{C.78})$$

– pour  $\delta\theta(r, z_0, t)$  et  $\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}(r, z_0, t)$  sur  $\Gamma_1$

$$\eta(r, t)\lambda(\theta) + rp(r, z_0, t)\lambda(\theta) = 0 \rightarrow \eta(r, t) = -pr \quad (\text{C.79})$$

$$\begin{aligned} -p(r, z_0, t)r \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - p(r, z_0, t)r h_{tot} - r \frac{\partial p}{\partial z}(r, z_0, t)\lambda(\theta) + rp(r, z_0, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \\ \rightarrow \boxed{-\lambda(\theta) \frac{\partial p}{\partial z}(r, z_0, t) = h_{tot} p(r, z_0, t)} \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

– pour  $\delta\theta(R, z, t)$  et  $\frac{\partial \delta\theta}{\partial z}(R, z, t)$  sur  $\Gamma_2$

$$\mu(z, t)\lambda(\theta) + p(R, z, t)R\lambda(\theta) = 0 \rightarrow \mu = -pR \quad (\text{C.81})$$

$$\begin{aligned} -p(R, z, t)R \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} - p(R, z, t)R h_{tot} - R \frac{\partial p}{\partial r}(R, z, t)\lambda(\theta) + rp(R, z, t) \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \\ \rightarrow \boxed{-\lambda(\theta) \frac{\partial p}{\partial r}(R, z, t) = h_{tot} p(R, z, t)} \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

– pour  $\delta\theta(r, Z, t)$  et  $\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r, Z, t)$  sur  $\Gamma_3$

$$\alpha(r, t)\lambda(\theta) - p(r, Z, t)r\lambda(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha(r, t) = pr \quad (\text{C.83})$$

$$p(r, Z, t)r\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} + p(r, Z, t)rh_{tot} - r\frac{\partial p}{\partial z}(r, Z, t)\lambda(\theta) - rp(r, Z, t)\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda(\theta)\frac{\partial p}{\partial z}(r, Z, t) = h_{tot}p(r, Z, t)} \quad (\text{C.84})$$

– pour  $\delta\theta(r_0, z, t)$  et  $\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}(r_0, z, t)$  sur  $\Gamma_4$

$$\beta(z, t)\lambda(\theta) - p(r_0, z, t)r_0\lambda(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \beta(r, t) = pr_0 \quad (\text{C.85})$$

$$p(r_0, z, t)r_0\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r} - r_0\frac{\partial p}{\partial r}(r_0, z, t)\lambda(\theta) - r_0p(r_0, z, t)\frac{d\lambda}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\lambda(\theta)\frac{\partial p}{\partial r}(r_0, z, t) = 0} \quad (\text{C.86})$$

Le système de deux équations (C.79) et (C.78) permet de déterminer la condition en  $p$  sur la limite  $\Gamma_0$ . Comme dans les problèmes directe et en variation, c'est une condition de Dirichlet imposant  $p = 0$ .

Les conditions aux limites présentées par les expressions (C.80), (C.82) et (C.84) sont équivalentes à des pertes par convection dans un milieu de température infinie nulle.

La dernière condition (C.86) est à un flux (en  $p$ ) nul sur la frontière  $\Gamma_4$ , ce qui revient donc à l'axisymétrie.

La condition initiale n'est, dans ce problème, pas exploitable car elle implique de connaître le multiplicateur  $\xi$ . Cependant, la variable adjointe  $p$  est connue à l'instant finale (C.87).

$$p(r, z, t_{fin}) = 0 \quad (\text{C.87})$$

Le système d'équation permettant de résoudre le problème adjoint est donc posé. Il est de forme particulièrement semblable au problème direct, au signe du terme temporel près. Il est à noter que même si le problème direct est non linéaire, le problème adjoint, lui est parfaitement linéaire. En effet, les propriétés thermophysiques ne sont pas fonction de  $p$  mais de la température  $\theta$ . Un terme source apparaît, il est constitué des écarts de température appliqués sur les positions des points de mesure.

Par définition, la résolution de ce problème adjoint permet de déterminer la variable  $p$  (multiplicateur de Lagrange) annulant quasiment tous les termes de la fonctionnelle de Lagrange.

Mais il reste un terme non nul issu de la condition aux limites en variation sur la frontière  $\Gamma_0$ . Ce dernier permet de déterminer la variation  $\delta(\sigma; \delta\sigma)$ .

$$\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}} -\gamma\delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z}(r, \sigma, t) dr dt \quad (\text{C.88})$$

Connaissant l'expression de  $\gamma$  par la relation (C.78), il est possible d'écrire,

$$\delta\mathcal{L}(\sigma; \delta\sigma) = - \int_{t_0}^{t_{fin}} \int_{r_0}^{r_{max}} r\lambda(\theta)\delta\sigma \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}(r, \sigma, t) dr dt \quad (\text{C.89})$$

## Annexe D

# Effet du méplat de l'électrode sur les dimensions de bain fondu

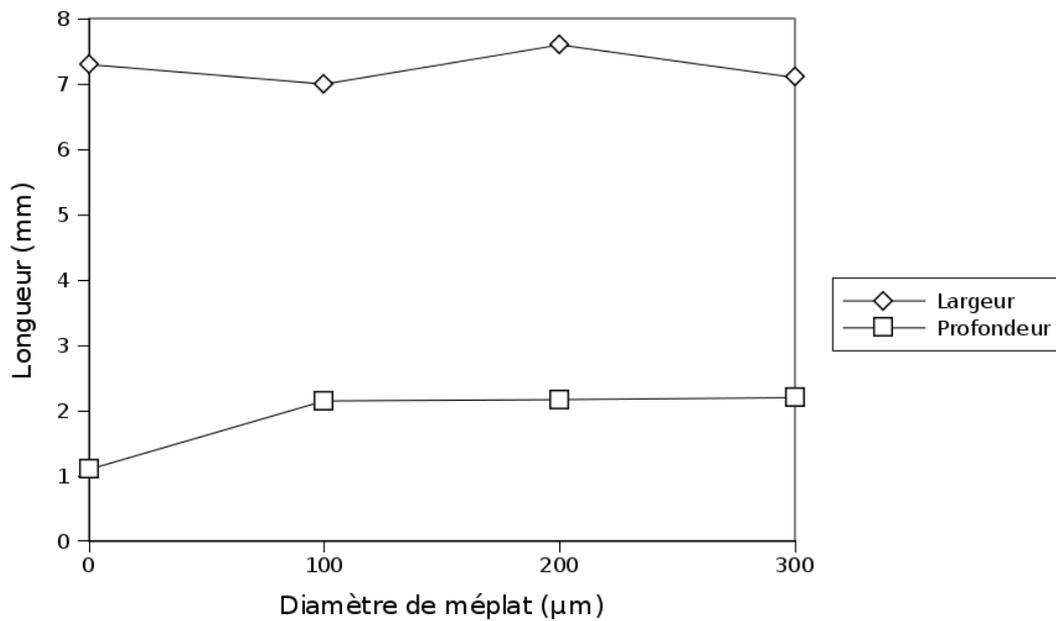


Figure D.1 – Évolution des dimensions du bain en fonction du diamètre de méplat pour des essais de 3s

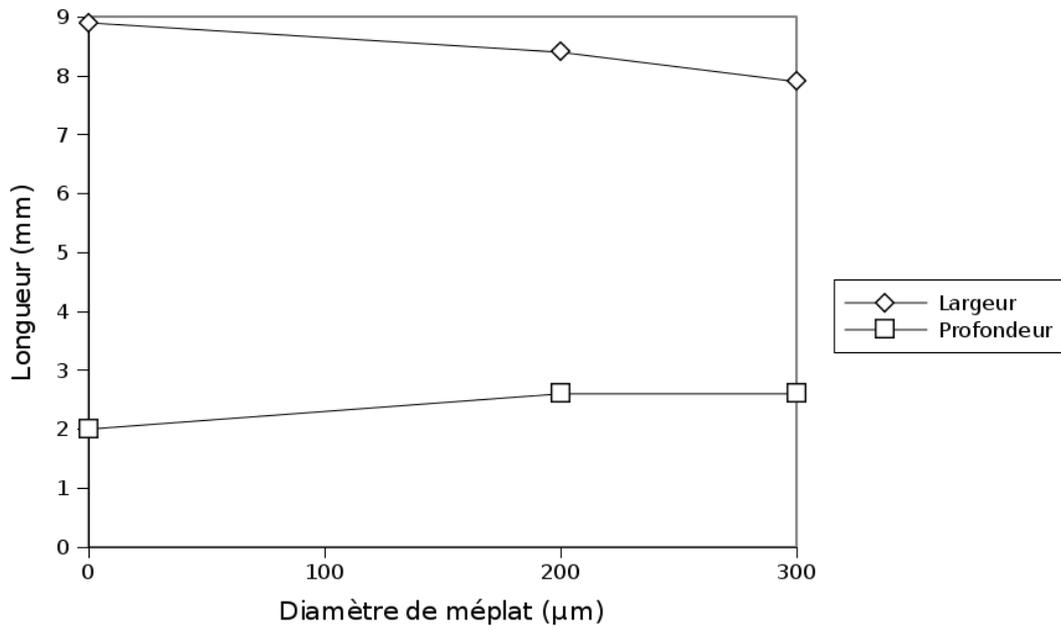


Figure D.2 – Évolution des dimensions du bain en fonction du diamméplat pour des essais de 9s

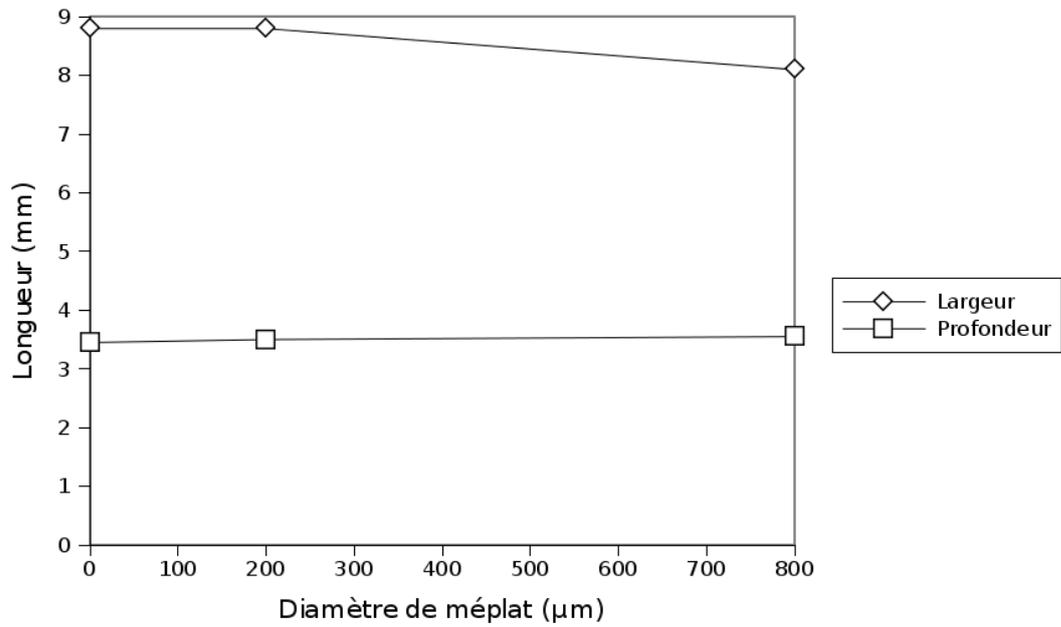


Figure D.3 – Évolution des dimensions du bain en fonction du diamméplat pour des essais de 20s

# Bibliographie

- [1] <http://www.omega.com/temperature/z/pdf/z016.pdf>.
- [2] Tableau de résistance chimique. [www.faber.fr](http://www.faber.fr).
- [3] A. Afshari, C. Bénard, C. Duhamel, and B. Guerrier. Problème inverse : suivi de l'évolution de la position d'un front de fusion à l'aide de mesure sur la phase solide. In J. SFT Modélisation Thermique Industrielle, 1991.
- [4] D. K. Aidun and S. A. Martin. Effect of sulfur and oxygen on weld penetration of high-purity austenitic stainless steels. Journal of Materials Engineering and Performance, 6 :496–502, 1997.
- [5] AkSteel. 316/316l stainless steel. Product Data Bulletin, 316/316L-B-08-01-07, 2007.
- [6] O. M. Alifanov. Solution of an inverse problem of heat conduction by iteration methods. Journal of Engineering Physics, 26(4) :1974, 471-476.
- [7] D. M. Anderson, G. B. McFadden, and A. A. Wheeler. A phase-field model of solidification with convection. Physica D, 135 :175–194, 2000.
- [8] M. H. Attia, A. Cameron, and L. Kops. Distortion in thermal field around inserted thermocouples in experimental interfacial studies, part 4 : End effect. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 124 :135–145, 2002.
- [9] S. Bag, A. Trivedi, and A. De. Use of a multivariate optimization algorithm to develop a self-consistent numerical heat transfer model for laser spot welding. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 38 :575–585, 2008.
- [10] J. A. Bakken, L. Gu, H. L. Larsen, and V. G. Sevastyanenko. Numerical modeling of electric arcs. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 70, No. 4 :530–543, 1997.
- [11] A. S. Barashkov. Small parameter method in multidimensional inverse problems. VSP, 1998.
- [12] J. P. Bardon and B. Cassagne. Température de surface - mesure par contact. Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle R 2 730 :1–27, 1998.
- [13] J. V. Beck, B. Blackwell, and C. Saint Clair. Inverse Heat Conduction : Ill-Posed Problems. John Wiley and Sons, 1985.
- [14] J. M. Bergheau and R. Fortunier. Simulation numérique des transferts thermiques par éléments finis. LAVOISIER, 2004.
- [15] A. Berthier, M. Carin, E. Le Guen, and P. Paillard. Simulation thermo-hydrolique du soudage tig et a-tig. In Congrès Français de Thermique Efficacité Énergétique, 2009.

- [16] K. B. Bisen, M. Arenas, N. El-Kaddah, and V. L. Acoff. Computation and validation of weld pool dimensions and temperature profiles for gamma tial. Metallurgical and Materials Transactions A, 34A :2273–2279, 2003.
- [17] R. Blondeau. Metallurgy and Machanics of Welding. Wiley, 2001.
- [18] C. Bonacina, G. Comini, A. Fasano, and M. Primicerio. Numerical solution of phase-change problems. International Journal of Heat and Mass Transfer, 16 :1825–1832, 1973.
- [19] G. Bonnier and E. Devin. Couples thermoélectriques - caractéristiques et mesure de température. Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle R 2 590 :1–22, 1997.
- [20] A. D. Brent, V. R. Voller, and K. J. Reid. The enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change : application to the melting of pure metal. Numerical heat transfert, vol. 13 N3 :297–318, 1988.
- [21] M. Brochard. Modèle couplé cathode-plasma-pièce en vue de la simulation du procédé de soudage à l'arc TIG. PhD thesis, Université de Provence, 2009.
- [22] C. Carboni, P. Peyre, G. Béranger, and C. Lemaitre. Influence of high power diode laser surface melting on the pitting corrosion resistance of type 316l stainless steel. Journal of Materials Science, 37 :3715–3723, 2002.
- [23] M. Carin. Square drop oscillation under surface tension - 2d axi-symmetric model. [www.comsol.fr/community/exchange/](http://www.comsol.fr/community/exchange/), 2009.
- [24] P. C. Carman. Fluid flow through granular beds. Trans. Institution of Chemical Engineers JUBILEE SUPPLEMENT, 75 :s32–s48, 1997.
- [25] E. Caron, M. A. Wells, and D. Li. A compensation method for the disturbance in the temperature field caused by subsurface thermocouples. Metallurgical and Materials Transactions B, 37B :475–483, 2006.
- [26] S. Chantasiriwan, B. T. Johansson, and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for free surface stefan problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, 33 :529–538, 2009.
- [27] M. Dal, P. Le Masson, M. Dumons, and D. Lawrjaniec. Analyse des erreurs de mesure lors d'une opération de soudage ; définition d'une instrumentation optimale. In Congrès Français de Thermique Efficacité Energétique, Tome 2, 2009.
- [28] F. De Monte, A. Ferriere, and J. V. Beck. Solar absorptivity of metallic layers subject to a short-flash of concentrated solar energy. theoretical-experimental calculation. In Journal of Physics : Conference Series 135, 2008.
- [29] L. Depradeux. Simulation numérique du soudage - Acier 316L. Validation sur cas tests de complexité croissante. PhD thesis, INSA de Lyon, 2003.
- [30] M. Do Quang. Melt Convection in Welding and Crystal Growth. PhD thesis, Royal Institute of Technology Department of Mechanics SE-100 44 Stockholm, Sweden, 2004.
- [31] D. D. Doan. Modèle de Source de Chaleur pour la Simulation du Soudage Avec et Sans Apport de Matière. PhD thesis, Ecole Polytech'Nantes, 2006.

- [32] D. D. Doan, F. Gabriel, Y. Jarny, P. Le Masson, and M. Dal. Analyse du transfert de chaleur dans une opération de soudage en utilisant les surfaces de bézier - comparaison avec la méthode de source équivalente. In T Congrès Français de Thermique, 2008.
- [33] H. Dong, H. Gao, and L. Wu. Heat transfer and fluid flow in fusion type pa-gta double-sided welding. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 13 :1205–1215, 2005.
- [34] J. J. Droesbeke, G. Saporta, and J. Fine. Plans d'expériences : applications à l'entreprise. Technip. Paris, 1997.
- [35] J. N. Dupont and A. R. Marder. Thermal efficiency of welding ard processes. Welding Research Supplement, pages 406–416, 1995.
- [36] C. P. Dyer. Method of etching steel. Technical report, Monsanto Chemichal Company, 1940.
- [37] A. El Badia and F. Moutazaim. A one-phase inverse stefan problem. Inverse Problems, 15 :1507–1522, 1999.
- [38] D. Fan, M. Ushio, and F. Matsuda. Numerical computation of arc pressure distribution. Transaction of JWRI, 15 :1–5, 1986.
- [39] H. G. Fan and Y. W. Shi. Numerical simulation of the arc pressure in gas tungsten arc welding. Journal of Materials Processing Technology, 61 :302–308, 1996.
- [40] H. G. Fan, H. L. Tsai, and S. J. Na. Heat transfer and fluid flow in a partially or fully penetrated weld pool in gas tungsten arc welding. International Journal of Heat and Mass Transfer, 44 :417–428, 2001.
- [41] E. Feulvarch, J. M. Bergheau, and J. B. Leblond. An implicit finite element algorithm for the simulation of diffusion with phase changes in solids. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 78 :1492–1512, 2009.
- [42] X. Ficquet, D. J. Smith, C. E. Truman, E. J. Kingston, and R. J. Dennis. Measurement and prediction of residual stress in a bead-on-plate weld benchmark specimen. International Journal of Pressure Vessels and Piping 86 (2009) 20–30, 86 :20–30, 2009.
- [43] G. A. Franco, E. Caron, and M. A. Wells. Quantification of the surface temperature discrepancy caused by subsurface thermocouples and methods for compensation. METALLURGICAL AND MATERIALS TRANSACTIONS B, 38B :949–956, 2007.
- [44] A. Frienman. Optimal control for parabolic variational inequalities. Journal of Control and Optimization, 25(2) :482–497, 1987.
- [45] Z. Gao, S. Hu, F. Yin, and R. Wang. Modeling of arc force in plasma arc welding. Transactions of Tianjin University, 14(3) :157–163, 2008.
- [46] J. Goldak, A. Chakravarti, and M. Bibby. A new finite element model for welding heat sources. Metallurgical and Materials Transactions B, 15(2) :299–305, 1984.
- [47] N. L. Gol'dman. Inverse Stefan Problem. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [48] C. V. Goncalves, L. O. Vilarinho, A. Scotti, and G. Guimaraes. Estimation of heat source and thermal efficiency in gtaw process by using inverse techniques. Journal of Materials Processing Technology, 172 :42–51, 2006.

- [49] M. Grolleau and J. P. Humeau. Numerical solution of a free-boundary-problem by an optimization method. Systems, Man and Cybernetics, 5 :59–64, 1993.
- [50] J. Guo. Estimation de la distribution énergétique induite par un faisceau d'électrons dans un matériau métallique – Application au cas du soudage d'un acier. PhD thesis, Université de Bretagne du Sud, 2005.
- [51] J. Guo, P. Le Masson, E. Artioukhine, T. Loulou, P. Rogeon, D. Carron, M. Dumons, and J. Costa. Estimation of a source term in a two diensional heat transfer problem : Application to an electron beam welding. In 4th International Conference on Inverse Problems : Identification, Design and Control, Moscow, Russia, 2003.
- [52] C. Hansen. Discrete Inverse Problems Insight and Algorithms. SIAM, 2009.
- [53] W. E. Heinz, H. Martin, and N. Andreas. Regularization of Inverse Problems. Kluwer Academic Publisher, 2000.
- [54] C. W. Hirt, A. A. Amsden, and J. L. Cook. An arbitrary lagragian-eulerian computing method for all flow speeds. Journal of Computational Physics, 135 :203–216, 1997.
- [55] K. Hong, C. Weckman, A. B. Strong, and W. Zheng. Modelling turbulent thermofluid flow in stationary gas tungsten weld pool. Science and Technology of Welding and Joining, 7 n°3 :125–136, 2002.
- [56] J. Hu, H. Guo, and H. L. Tsai. Weld pool dynamics and the formation of ripples in 3d gas metal arc welding. International Journal of Heat and Mass Transfer, 51 :2537–2552, 2008.
- [57] C.-H. Huang and M.-T. Chaing. A transient three-dimensional inverse geometry problem in estimating the space and time-dependent irregular boundary shapes. International Journal of Heat and Mass Transfer 51 (2008) 5238–5246, 51 :5238–5246, 2008.
- [58] M. Jeyakumar, M. Hamed, and S. Shankar. Rheology of liquid metals and alloys. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166 :831–838, 2011.
- [59] W. Jiang, J. Gong, S. Tu, and Q. Fan. A comparison of brazed residual stress in plate–fin structure made of different stainless steel. Materials and Design, 30 :23–27, 2009.
- [60] V. A. Karkhin, V. V. Plochikhine, and H. W. Bergmann. Solution of inverse heat conduction problem for determinig heat input, weld shape, and grain structure during laser welding. Science and Technology of Welding and Joining, 7 N°4 :224–231, 2002.
- [61] V. A. Karkhin, V. V. Plochikhine, A. S. Ilyin, and H. W. Bergmann. Inverse modeling of fusion welding processes. Welding In the World, 46 n°11-12 :2–13, 2002.
- [62] R. G. Keanini and N. N. Desai. Inverse finite element reduced mesh method for predicting multi-dimensional phase change boundaries and nonlinear solid phase heat transfer. International Journal of Heat and Mass Transfer, 39(5) :1039–1049, 1996.
- [63] R. G. Keanini and B. Rubinski. An inverse finite element minimization-based method for solution of multi-dimensional phase-change and material boundary shape. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37 :1125–1141, 1994.
- [64] N. Kerrouault. Fissuration à chaud en soudage d'un acier inoxydable austénitique. PhD thesis, Centrale Paris, 2001.

- [65] C. S. Kim. Thermophysical properties of stainless steels. Technical report, Argonne National Lab. III (USA), 1975.
- [66] I. S. Kim and A. Basu. A mathematical model of heat transfer and fluid flow in the gas metal arc welding process. Journal of Materials Processing Technology, 77 :17–24, 1998.
- [67] W. H. Kim, H. G. Fan, and S. J. Na. A mathematical model of gas tungsten arc welding considering the cathode and the free surface of the weld pool. Metallurgical and Materials Transactions B, 28B :679–686, 1997.
- [68] W. H. Kim and S. J. Na. Heat and fluid flow in pulsed current gta weld pool. International Journal of Heat and Mass Transfer, 41 :3213–3227, 1998.
- [69] R. Komanduri and Z. B. Hou. Thermal analysis of the arc welding process : Part i. general solutions. Metallurgical and Materials Transactions B, 31B :1353–1370, 2000.
- [70] L. Kowalski, J. Duszczyk, and L. Katgerman. Thermal conductivity of metal powder-polymer feedstock for powder injection moulding. Journal of Materials Science, 34 :1–5, 1999.
- [71] A. Kumar and T. DebRoy. Calculation of three-dimensional electromagnetic force field during arc welding. Journal of Applied Physics, 94, NUMBER 2 :1267–1277, 2003.
- [72] A. Kumar and T. DebRoy. Guaranteed fillet weld geometry from heat transfer model and multivariable optimization. International Journal of Heat and Mass Transfer, 47 :5793–5806, 2004.
- [73] A. Kumar and T. DebRoy. Heat transfer and fluid flow during gas-metal-arc fillet welding for various joint configurations and welding positions. A Metallurgical and Materials Transactions A, 38A :506–519, 2007.
- [74] B. Le Bourgeois. Soudage à l’arc. 1997.
- [75] E. Le Guen. Étude du procédé de soudage hybride laser/MAG : Caractérisation de la géométrie et de l’hydrodynamique du bain de fusion et développement d’un modèle 3D thermique. PhD thesis, Université de Bretagne Sud, 2009.
- [76] P. Le Masson, T. Loulou, and E. Artioukhine. Comparison between two methods for estimating the convection heat transfer coefficient during a metallurgical jominy end-quench test. In 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering, 2002.
- [77] P. Le Masson, T. Loulou, and E. Artioukhine. Experimental and numerical estimations of a two dimensional convection heat transfer coefficient during a metallurgical "jominy end-quench" test. In 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering, Rio de Janeiro, Brazil, volume ??, pages 1–23, 2002.
- [78] Y. P. Lei, H. Murakawa, Y. W. Shi, and X. Y. Li. Numerical analysis of the competitive influence of marangoni flow and evaporation on heat surface temperature and molten pool shape in laser surface remelting. Computational Materials Science, 21 :276–290, 2001.
- [79] D. Li and M. A. Wells. Effect of subsurface thermocouple installation on the discrepancy of the measured thermal history and predicted surface heat flux during a quench operation. Metallurgical and Materials Transactions B, 36B :343–354, 2005.

- [80] Z. Y. Li and C. S. Wu. Analysis of the transport phenomena in the interfacial region between tig arcs and weld pools. Computational Materials Science 8 (1997) 243-250, 8 :243–250, 1997.
- [81] C. Limmaneevichitr and S. Kou. Visualization of marangoni convection in simulated weld pools. Weldin Research Supplement, pages 126s–135s, 2000.
- [82] M. L. Lin and T. W. Eagar. Influence of surface depression and convection on arc weld pool geometry. Transport Phenomena in Materials Processing, ASME PED, 10 :63–69, 1983.
- [83] M. L. Lin and T. W. Eagar. Influence of arc pressure on weld pool geometry : A new model of a compound vortex is proposed as a possible mechanism to explain the deep surface depression encountered at currents over 300 amperes. Welding Research Supplements, 1985.
- [84] M. L. Lin and T. W. Eagar. Pressures produced by gas tungsten arcs. Metallurgical Transactions B, 17B :601–607, 1986.
- [85] J. J. Lowke, M. Tanaka, and M. Ushio. Mechanisms giving increased weld depth due to a flux. J. Phys. D : Appl. Phys. 38 (2005) 3438–3445, 38 :3438–3445, 2005.
- [86] F. Lu, X. Tang, H. Yu, and S. Yao. Numerical simulation on interaction between tig welding arc and weld pool. Computational Materials Science 35 (2006) 458–465, 35 :458–465, 2006.
- [87] F. Lu, S. Yao, S. Lou, and Y. Li. Modeling and finite element analysis on gtaw arc and weld pool. Computational Materials Science, 29 :371–378, 2004.
- [88] S. Lu, W. Dong, D. Li, and Y. Li. Numerical study and comparisons of gas tungsten arc properties between argon and nitrogen. Computational Materials Science, 45 :327–335, 2009.
- [89] M. Maniana, A. Azim, H. Rhanim, and P. Archambault. Problème inverse pour le traitement laser des métaux à transformations de phases. International Journal of Thermal Sciences, 48 :795–804, 2009.
- [90] K. C. Mills. Recommended values of thermophysical properties for selected commercial alloys. Chandos Publishing, 2002.
- [91] M. S. Min Hyun Cho. Numerical Simulation of Arc Welding Process and its Application. PhD thesis, Ohio State University, 2006.
- [92] S. Mishra and T. DebRoy. Tailoring gas tungsten arc weld geometry using a genetic algorithm and a neural network trained with convective heat flow calculations. Materials Science and Engineering A, 454-455 :477–486, 2007.
- [93] S. Mishra, T. J. Lienert, M. Q. Johnson, and T. DebRoy. An experimental and theoretical study of gas tungsten arc welding of stainless steel plates with different sulfur concentrations. Acta Materialia, 56 :2133–2146, 2008.
- [94] C. Multiphysics. Modeling Guide - Version 3.5a - Deformed Meshes. 2008.
- [95] B. Nedjar. An enthalpy based finite element method for nonlinear heat problems involving phase change. Computers and Structures, 80 :9–21, 2002.
- [96] I. Nowak, A. J. Nowak, and L. C. Wrobel. Identification of phase change fronts by bezier splines and bem. International Journal of Thermal Science, 41 :492–499, 2002.

- [97] H. Orlande and N. Ozisik. Inverse heat transfer. Taylor & Francis, 2000.
- [98] H. R. B. Orlande, O. Fudym, D. Maillet, and R. M. Costa. Thermal measurements and Inverse techniques. CRC Press, 2011.
- [99] oyezsteel. <http://www.oyezsteel.com>.
- [100] P. Peyre, L. Berthe, R. Fabbro, and A. Sollier. Experimental determination by pvd and emv techniques of shock amplitudes induced by 0.6–3 ns laser pulses in a confined regime with water. Journal of Physics D : Applied Physics, 33 :498–503, 2000.
- [101] S. Philippe. Développement d’une formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulerienne pour la simulation tridimensionnelle du laminage de produits plats. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2009.
- [102] B. Protas and W. Liao. Adjoint-based optimization of pdes in moving domains. Journal of Computational Physics, 227 :2707–2723, 2008.
- [103] S. Rabier. Développement d’un modèle éléments finis pour la simulation d’écoulements à surface libre : application au soudage. PhD thesis, Université de Provence, 2003.
- [104] M. A. Ramirez, G. Trapaga, and J. McKelliget. A comparison between different numerical formulations for welding arc representations. Journal of Materials Processing Technology 155–156 (2004) 1634–1640, 155–156 :1634–1640, 2004.
- [105] E. Ranatowski and K. Ciechacki. Mathematical modelling of laser welding in shipbuilding. Scientific journals, 24(96) :80–87, 2010.
- [106] D. Rosenthal. Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting. Welding journal, 20(5) :220–234, 1941.
- [107] P. Sahoo, T. DebRoy, and M. J. McNallan. Surface tension of binary metal - surface active solute systems under conditions relevant to welding metallurgy. Metallurgical transactions B, 19B :483–491, 1988.
- [108] D. Sanyal, P. Ramachandrarao, and O. P. Gupta. A fast strategy for simulation of phase change phenomena at multiple length scales. Computational Materials Science, 37 :166–177, 2006.
- [109] X. Shan, C. M. Davies, T. Wangsdan, N. P. O’Dowd, and K. M. Nikbin. International journal of pressure vessels and piping. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 86 :110–121, 2009.
- [110] J. Szimmat. Numerical simulation of the solidification processes in enclosures. Heat and Mass Transfer, 38 :279–293, 2002.
- [111] M. Tanaka, H. Terasaki, M. Ushio, and J. J. Lowke. A unified numerical modeling of stationary tungsten-inert-gas welding process. Metallurgical and Materials Transactions A, 33A :2043–2052, 2002.
- [112] M. Tanaka, M. Ushio, and J. Lowke. Numerical analysis for weld formation using a free-burning helium arc at atmospheric pressure. JSME International Journal Series B, 48, No. 3 :397–404, 2005.
- [113] A. Traidia. Multiphysics modelling and numerical simulation of GTA weld pools. PhD thesis, École polytechnique, ENSTA ParisTech, 2011.

- [114] A. Traidia and F. Roger. Numerical and experimental study of arc and weld pool behaviour for pulsed current gta welding. International Journal of Heat and Mass Transfer, 54 :2163 – 2179, 2011.
- [115] A. Traidia, F. Roger, and E. Guyot. Optimal parameters for pulsed gas tungsten arc welding in partially and fully penetrated weld pools. International Journal of Thermal Sciences, 49 :1197–1208, 2010.
- [116] A. Traidia, F. Roger, and J. Schroeder. Three dimensional modeling of the weld pool behavior during gta welding with filler metal. In Proceedings of the COMSOL Conference 2010 Paris, 2010.
- [117] B. Truffart. Méthode d’optimisation pour la résolution de problème inverses de conduction de la chaleur. PhD thesis, ISITEM, 1996.
- [118] N. Tsai. Heat Distribution and Weld Bead Geometry in Arc Weld. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1983.
- [119] N. S. Tsai and T. W. Eagar. Distribution of the heat and current fluxes in gas tungsten arcs. Metallurgical Transactions A, 16B :841–846, 1985.
- [120] R. M. Urusov and T. E. Urusova. Computation of steady flow in the molten pool at electric-arc heating. Thermophysics and Aeromechanics, 2007, Vol. 14, No. 2, 14(2) :265–276, 2007.
- [121] J. Van den Bosch and A. Almazouzi. Compatibility of martensitic/austenitic steel welds with liquid lead bismuth eutectic environment. Journal of Nuclear Materials, 385 :504–509, 2009.
- [122] Y. Wang, Q. Shi, and H. L. Tsai. Modeling of the effects of surface-active elements on flow patterns and weld penetration. Metallurgical and Materials Transactions B, 32B :145–161, 2001.
- [123] P. S. Wei and F. K. Chung. Unsteady marangoni flow in a molten pool when welding dissimilar metals. Metallurgical and Materials Transactions B, 31B :1387–1403, 2000.
- [124] B. Wilthan, H. Reschab, R. Tanzer, W. Schützenhöfer, and G. Pottlacher. Thermophysical properties of a chromium–nickel–molybdenum steel in the solid and liquid phases. International Journal of Thermophysic, 29 :434–444, 2008.
- [125] C. S. Wu, J. Chen, and Y. M. Zhang. Numerical analysis of both front- and back-side deformation of fully-penetrated gtaw weld pool surfaces. Computational Materials Science 39 (2007) 635–642, 39 :635–642, 2007.
- [126] Y. L. Xu, Z. B. Dong, Y. H. Wei, and C. L. Yang. Marangoni convection and weld shape variation in a-tig welding process. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 48 :178–186, 2007.
- [127] L. X. Yang, X. F. Peng, and B. X. Wang. Numerical modeling and experimental investigation on the characteristics of molten pool during laser processing. International Journal of Heat and Mass Transfer, 44 :4465–4473, 2001.
- [128] F. Yin, S. Hu, C. Yu, and L. Li. Computational simulation for the constricted flow of argon plasma arc. Computational Materials Science, 40 :389–394, 2007.

- [129] N. Zabaras, Y. Ruan, and O. Richmond. Design of two-dimensional stefan processes with desired freezing front motions. Numerical heat transfer, Part B, 21 :307–325, 1992.
- [130] T. Zacharia and S. A. David. Computational modeling of gta welding with emphasis on surface tension effects. In Proceedings of the 3rd ASME-JSME Thermal Engineering, 1991.
- [131] W. Zhang, G. G. Roy, J. W. Elmer, and T. DebRoy. Modeling of heat transfer and fluid flow during gas tungsten arc spot welding of low carbon steel. Journal of applied physics, 93 N5 :3022–2033, 2003.
- [132] P. C. Zhao, C. S. Wu, and Y. M. Zhang. Numerical simulation of the dynamic characteristics of weld pool geometry with step-changes of welding parameters. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 12 (2004) 765–780 :765–780, 2004.
- [133] Y. Zhao, Y. Shi, and Y. Lei. The study of surface-active element oxygen on flow patterns and penetration in a-tig welding. Metallurgical and Materials Transactions B, 37B :485–493, 2006.